



САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра общей и теоретической физики

Ю.П. Филиппов^a

Алгебраическая редукция скалярных N - точечных интегралов.

Метод ветвления

(Доклад)

"Концепции симметрии и фундаментальных полей в квантовой физике XXI века"

2. 07. 2005, СамГУ, Самара

^aE-mail: yurphil@front.ru

План доклада

1. Введение
2. Общая схема расчета
3. Одноточечная скалярная функция A_0
4. Двухточечная скалярная функция B_0
5. Трехточечная скалярная функция C_0
6. Заключение

1. Введение

Метод теории возмущений - один из наиболее успешных и широко используемых методов вычисления физических наблюдаемых в КТП (Ф. Дайсон, С. Томонага, Р. Фейнман, Дж Швингер).

⇒ Суть метода – разложение амплитуды процесса в ряд по характерному малому параметру и учет лишь конечного числа слагаемых в данном разложении.

⇒ Состав и количество удерживаемых слагаемых определяется порядком параметра разложения, который детерминируется требуемой точностью вычисления.

⇒ В расчетах ограничиваются первым порядком теории возмущений. Амплитуда процесса, как правило, представляется в виде линейной комбинации одно-, двух-, трех-, четырехточечных скалярных интегралов.

⇒ Вплоть до конца 70-ых годов XX столетия не было известно алгоритмов расчета данных интегралов в общем случае.

⇒ Первые алгоритмы вычисления интегралов в общем случае были представлены в работах:

[1] G. 't Hooft and M. Veltman// Nucl. Phys. B153, (1979) 365.

[2] G. Passarino and M. Veltman// Nucl. Phys. B160, (1979) 151.

Здесь впервые получено выражение для C_0 в виде суммы 12 дилוגарифмов.

Подход с использованием кинематических детерминантов

[3] G. J. van Oldenborgh, J. A. M. Vermaseren // Z. Phys. C46, (1990) 425.

Интерпретирование с использованием представления Меллина-Барнса

[4] A.I.Davydychev, J.Math.Phys. 32, (1991) 1052.

[5] A.I.Davydychev J.Math.Phys. 33, (1992) 358.

[6] E. E. Boos and A. I. Davydychev, Theor. Math. Phys. 89, (1991) 1052.

Полноминимальная техника Гейджиобауэра

[7] A.E.Terrano, Phys.Lett.B 93, (1980) 424.

Интерпретирование по частям

[8] F.V.Tkachov, Phys.Lett.B 100, (1981) 65; K.G.Chetyrkin, F.V.Tkachov, Nucl.Phys.B 192, (1981) 159.

Интер-вание в пространстве с отрицательной размерностью

[9] I. G. Halliday, R. M. Ricotta, Phys.Lett.B 193, (1987) 241; G.V.Dume, I. G. Halliday, Phys.Lett.B 193, (1987) 247.

[10] A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt, J. Phys. A31, (1998) 8023.

Интерпретирование функций, разложенных в ряд

[11] M.G.Schmidt, C.Schubert, Phys. Rev. D 53, (1996) 2150.

Метод дифференциальных уравнений

[12] T. Gehrmann, E. Remiddi, Nucl. Phys. B **601**, (2001) 287; Nucl. Phys. Proc. Suppl. **89**, (2000) 251. *Ibid*, preprint [hep-ph/0207020].

Тенденции в построении алгоритмов вычисления

Построение общих решений для интегралов как фундаментальная проблема (абстрактные теоретические конструкции)

Решение проблем численного интегрирования. Адаптация общих решений к машинным кодам

Машинные ошибки вычислений, большое многообразие свойств специфичных нескольких переменных приводят к серьезным проблемам в численном исчислении интегралов.

например, в расчетах радиационных поправок с помощью программы FormF (M. Bektman), в отдельных случаях **необходимо было поддерживать точность в 120 знаков после запятой**, чтобы добиться сокращения подобных слогаемых и **получить корректный результат!** Процесс вычисления \Rightarrow крайне медленный и иногда невозможный в силу ограничений возможностей ЭВМ

Вывод: проблема компьютерных расчетов \Rightarrow к проблеме поиска всевозможных структур первообразной при снятии интеграла в рассматриваемой области допустимых значений параметров данных интегралов.

✎ Автором предложен сценарий алгебраической редукции, основанный на математическом методе ветвления.

✎ Основная идея подхода - детальный анализ поведения подинтегральной функции при различных значениях параметров последующим поиском соответствующей первообразной.

- ✎ Основные преимущества данного подхода
- в большинстве случаев удается избежать выхода в комплексную плоскость переменной интегрирования;
- выделение действительной и мнимой частей в результате;
- результаты представляются деревом возможных решений, легко интегрируемым машинные коды.

2. Общая схема расчета

☞ Данные интегралы – несобственные \implies м. б. расходящимися. Для устранения у.ф. расходимостей – метод размерной регуляризации - перопределение подинтегральной функции с целью представления в виде суммы двух слагаемых: **расходящегося (полюс) и конечной части**. Полное слагаемое типа $\frac{\varepsilon}{const}$, $(\varepsilon \rightarrow 0)$ исключается процедурой перенормировки, а конечная часть дает вклад в итоговый результат.

1. Переход в \mathcal{D} - мерное пространство

☞ Рассмотрим \mathcal{D} - мерного аналога функции в пространстве Минковского ($\mathcal{D} > 4$).
☞ Если \mathcal{D} не фиксировано \implies ничего нельзя сказать о характере расходимости \implies можно манипулировать с подинтегральной функцией как с ограниченной гладкой функцией.
☞ При этом

$$(1) \quad \lim_{\mathcal{D} \rightarrow 4} \mu^{4-\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}^{\mathcal{D}}} d^{\mathcal{D}}q [\dots] = \int_{\mathcal{D}^4} d^4q [\dots]$$

здесь μ - параметр размерной регуляризации – сохраняет размерность данного интеграла в \mathcal{D} измерениях для сохранения калибровочной инвариантности.

2. Параметризация Фейнмана

☞ Подинтегральная функция (1) определяется произведением пропагаторов \implies

интегрирование по импульсу затруднительно.

⇔ Для интегрирования подынтегральная функция д. иметь структуру типа $1/[q^2 + M_N^2]$. В работе

[13] R. P. Feynman// Phys. Rev. 76 (1949), 769.

предложен подход параметризации скалярных интегралов \implies перепределению подынтегральной функции с помощью выражения

$$\frac{1}{D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_N^{\alpha_N}} = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^N \alpha_i)}{\Gamma(\sum_{i=1}^N \alpha_i)} \int_0^1 \dots \int_0^1 dx_1 dx_2 \dots dx_N \delta(1 - \sum_{i=1}^N x_i) \times \left(\sum_{i=1}^N D_i^{\alpha_i} \right)^{-1}$$

⇔ \implies в подынтегральном выражении требуется необходимая комбинация по переменной q .

⇔ Выделение полного квадрата и переход к новой переменной q' посредством сдвига импульса на конечную величину.

3. Поворот Вика. Интегрирование в \mathcal{D} - мерном евклидовом пространстве

$$(2) \quad \left\{ q'_0 \rightarrow q_E, \quad q'_i \rightarrow q_E^i, \quad i = 1, \dots, N-1 \right\} \Leftrightarrow \left\{ dq' \rightarrow dq_E, \quad q'_2 \rightarrow -q_E^2 \right\}$$

4. Предельный переход $\mathcal{D} \rightarrow 4$. Дифференциация результата

\Rightarrow разложение Γ - функции

$$(3) \quad \int \frac{d^D q_E}{[q_E^2 + M_2^2]^n} = \pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} (M_2^2)^{-(n - \frac{D}{2})}$$

$$(4) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma(-n + \varepsilon) = \frac{(-1)^n n!}{1} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \tilde{\psi}(n+1) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right]$$

где $\tilde{\psi}(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma_e$, $\gamma_e = 0.5772157$ - постоянная Эйлера-Маскерони; параметр ε определяется как

$$(5) \quad \varepsilon = 4 - \mathcal{D} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mathcal{D} \rightarrow 4 - 0$$

$$(6) \quad a^\varepsilon = 1 + \varepsilon \ln a, \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

\Rightarrow расходящаяся часть интеграла:

$$(7) \quad \Delta^\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\varepsilon} + \ln(4\pi) - \gamma_e \right)$$

5. Ряд алгебраической преобразования – ряд алгебраических преобразований, процедуры вычисления интегралов, сведение к набору специальных функций.

3. Одноточечная скалярная функция A_0

► \mathcal{D} - мерный аналог интеграла в пространстве Минковского

$$(8) \quad \int \frac{d^4 q}{1} (2\pi)^4 (q^2 - m^2 + i\delta)$$

$$(9) \quad \int \frac{d^D q}{1} (2\pi)^D (q^2 - m^2 + i\delta)$$

► поворот Вика (2), интегрирование в \mathcal{D} - евклидовом пространстве с учетом (3)

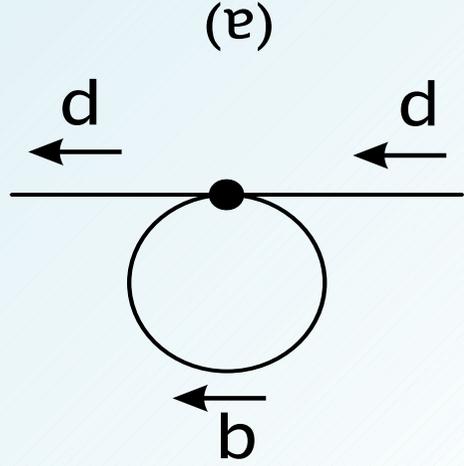
$$(10) \quad A_0^{\mathcal{D}}(m^2) = -(\pi)^{-(2-\frac{D}{2})} (2\pi\mu)^{4-D} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\frac{D}{2})} (m^2)^{\frac{D}{2}-1}$$

► В пределе

$$(11) \quad A_0(m^2) = \lim_{D \rightarrow 4} A_0^{\mathcal{D}}(m^2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\pi^{-\frac{2}{\varepsilon}} \Gamma(-1 + \frac{2}{\varepsilon}) (m^2)^{1-\frac{2}{\varepsilon}} (2\pi\mu)^\varepsilon)$$

► УЧИТЫВАЯ (4), (6), (7) \iff

$$(12) \quad A_0(m^2) = m^2 \left[\Delta_\varepsilon + 1 - \ln \left[\frac{m^2}{\mu^2} \right] \right]$$



4. Двухточечная скалярная функция B_0

$$(13) \quad \int \frac{d^4 q}{1} \frac{16\pi^2 B_0(p_2, m_1^2, m_2^2)}{(2\pi)^4 (q_2^2 - m_1^2 + i\delta)((q+p)_2^2 - m_2^2 + i\delta)} = \int \frac{d^4 q}{1} \frac{16\pi^2 B_0(p_2, m_1^2, m_2^2)}{(2\pi)^4 (q_2^2 - m_1^2 + i\delta)((q+p)_2^2 - m_2^2 + i\delta)}$$

► \mathcal{D} - мерный аналог интеграла в пространстве Минковского

$$(14) \quad \int \frac{d^D q}{1} \frac{16\pi^2 B_0(p_2, m_1^2, m_2^2)}{(2\pi)^D (q_2^2 - m_1^2 + i\delta)((q+p)_2^2 - m_2^2 + i\delta)} = \int \frac{d^D q}{1} \frac{16\pi^2 B_0(p_2, m_1^2, m_2^2)}{(2\pi)^D (q_2^2 - m_1^2 + i\delta)((q+p)_2^2 - m_2^2 + i\delta)}$$

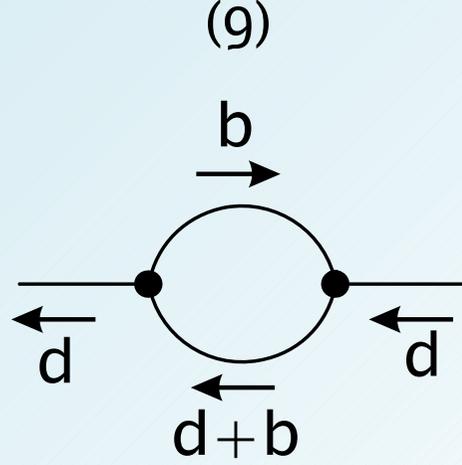
► Параметризация Фейнмана

$$(15) \quad \int_0^1 \frac{D_1 D_2}{1} = \int_0^1 \frac{D_1 D_2}{D_1 x + D_2 (1-x)}$$

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_1 = ((q+p)_2^2 - m_2^2 + i\delta) \\ D_2 = (q_2^2 - m_1^2 + i\delta) \end{array} \right.$$

$$(17) \quad \int_1^{4-D} dx \int \frac{d^D q'}{1} \frac{16\pi^2 B_0(p_2, m_1^2, m_2^2)}{(2\pi)^D (q'_2 - m_2^2 + i\delta)} = \int_0^1 dx \int \frac{d^D q'}{1} \frac{16\pi^2 B_0(p_2, m_1^2, m_2^2)}{(2\pi)^D (q'_2 - m_2^2 + i\delta)}$$

$$(18) \quad q' = q + px, \quad M_2^2 = p_2^2 x^2 - x(p_2^2 + m_1^2 - m_2^2) + m_1^2 - i\delta$$



где

► поворот Вика (2), интегрирование в евклидовом \mathcal{D} - пространстве с учетом (3)

$$(19) \quad \frac{16\pi^2}{2^{5/2}} B_D^0(p_2, m_1, m_2) = \frac{16\pi^2}{2^{5/2}} \Gamma\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \int_1^0 dx \left(\frac{4\pi\mu_2^2}{M_2}\right)^{2/\varepsilon}$$

с учетом

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon}{2} - \gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \left(\frac{4\pi\mu_2^2}{M_2}\right)^{2/\varepsilon} = 1 + \frac{2}{\varepsilon} \ln\left[\frac{4\pi\mu_2^2}{M_2}\right] \end{array} \right.$$

► Предельный переход

$$(21) \quad B_0(p_2, m_1, m_2) = \lim_{D \rightarrow 4} B_D^0(p_2, m_1, m_2) = [\Delta^\varepsilon + \ln \mu_2^2 - \mathcal{I}(p_2, m_1, m_2)]$$

где

$$(22) \quad \mathcal{I}(p_2, m_1, m_2) = \int_1^0 dx \ln[M_2] = \int_1^0 dx \ln[ax^2 + bx + c]$$

$$(23) \quad a = p_2^2, \quad b = -(p_2^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad c = m_1^2$$

► Редукция конечной части

⇒ Ситуация №1: $a \neq 0; b, c \in \mathbb{R}$.

(24)

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

(25)

$$\mathfrak{D} = b^2 - 4ac$$

→ Вариант № 1: $\mathfrak{D} \geq 0$:

$$(26) \quad x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac} = \frac{1}{2} + \frac{m_1^2 - m_2^2}{2p^2} \pm \frac{1}{2p^2} \sqrt{\lambda(p_2, m_2^2, m_1^2, m_2^2)}$$

где

$$(27) \quad \lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$$

$$\mathcal{I}_{11} = \ln|a| + i\pi\theta(-a) - 2 + \sum_{i=1}^2 [(1 - x_i) \ln|1 - x_i| + x_i \ln|x_i| + i\pi[\theta(x_i - 1) + x_i\theta(x_i)\theta(1 - x_i)]]$$

(28)

→ Вариант № 2: $\mathfrak{D} > 0$:

$$(29) \quad \mathcal{I}_{12} = \ln|a| + i\pi\theta(-a) + \left(1 + \frac{b}{2a}\right) \ln\left[1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right] - \frac{b}{2a} \ln\frac{a}{c} - 2 +$$

$$(30) \quad \sqrt{-\lambda(p_2, m_2^2)} + \frac{a}{\arctan \left[\frac{a}{\sqrt{-\lambda(p_2, m_2^2)}} \right]} + \frac{b + 2c}{\sqrt{-\lambda(p_2, m_2^2)}}$$

↔ Ситуация № 2 : $a = 0, b \neq 0, c \in \mathfrak{R}$

$$I_2 = \int_1^0 dx \ln [bx + c] = \ln |b| + \left(1 + \frac{b}{c}\right) \ln \left|1 + \frac{b}{c}\right| - \frac{b}{c} \ln \left|\frac{b}{c}\right| - 1 +$$

$$+ i\pi \left[1 + \theta(-b) - \theta\left(1 + \frac{b}{c}\right) - \frac{b}{c} \theta\left(-\frac{b}{c}\right) \theta\left(1 + \frac{b}{c}\right)\right]$$

(31)

↔ Ситуация № 3 : $a = 0, b = 0, c \neq 0$

$$I_3 = \int_1^0 dx \ln |c| = \ln |c| + i\pi\theta(-c)$$

(32)

$$(33) \quad I = \begin{cases} \text{если } a \neq 0; b, c \in \mathfrak{R}, \text{ то } I_1 = \begin{cases} I_{11}, (28), & \text{если } \Im \geq 0, \\ I_{12}, (30), & \text{если } \Im > 0 \end{cases} \\ \text{если } a = 0, b \neq 0, c \in \mathfrak{R}, \text{ то } I_2, (31), \\ \text{если } a, b = 0, c \neq 0, \text{ то } I_3, (32) \end{cases}$$

5. Трёхточечная скалярная функция C_0

$$(34) \quad \frac{16\pi^2}{i} C_0(p_1^2, p_2^2, p_1 p_2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \times \frac{1}{(q_2^2 - m_1^2 + i\delta)((q + p_1)^2 - m_2^2 + i\delta)((q + p_2)^2 - m_3^2 + i\delta)}$$

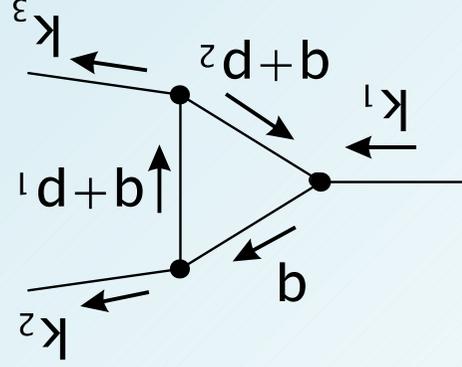
Особенность интеграла - не содержит ультрафиолетовой расходимости

► Параметризация Фейнмана

$$(35) \quad \frac{1}{D_1 D_2 D_3} = 2 \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 dy \frac{D_1 D_2 D_3}{D_1(1-x-y) + D_2 x + D_3 y}$$

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} D_1 &= (q_2^2 - m_1^2 + i\delta) \\ D_2 &= ((q + p_1)^2 - m_2^2 + i\delta) \\ D_3 &= ((q + p_2)^2 - m_3^2 + i\delta) \end{aligned} \right.$$

$$(37) \quad \frac{16\pi^2}{i} C_0(p_1^2, p_2^2, p_1 p_2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = 2 \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 dy \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[q_2^2 - m_1^2 + i\delta]^3}$$



(в)

где

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} q' &= q + p_1x + p_2y, \\ M_2 &= p_2^1x^2 + p_2^2y^2 + 2p_1p_2xy - p_2^1x - p_2^2y + m_2^2x + m_2^2y + m_2^1(1 - x - y) - i\delta \end{aligned} \right.$$

► поворот Вика (2), интегрирование в евклидовом $\mathbb{4}$ - пространстве с учетом (3)

$$(39) \quad C_0(p_1^1, p_2^1, p_1p_2, m_1^1, m_2^1, m_2^2, m_3^2) = - \int_1^0 dx \int_{1-x}^0 dy \frac{M_2}{1}$$

Замена: $y \rightarrow 1 - y, x \leftrightarrow y$

$$(40) \quad C_0(p_1^1, p_2^1, p_1p_2, m_1^1, m_2^1, m_2^2, m_3^2) = - \int_1^0 dx \int_x^0 \frac{dx_2 + by_2 + cxy + dx + ey + f}{dy}$$

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= p_2^2, b = p_2^1, c = -2(p_1p_2), d = m_2^1 - p_2^2 - m_3^2, \\ e &= m_2^2 + 2p_1p_2 - p_2^1 - m_2^1, f = m_3^2 - i\delta \end{aligned} \right.$$

Поворот в плоскости OXY :

$$(42) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Требование: равенство нулю коэффициента при $x'y'$

$$\tan 2\alpha = \frac{b-a}{c} = \kappa \quad (43)$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{1+\kappa^2}}{1}}; \sin \alpha = \operatorname{sgn} \left[\frac{1}{2} \arctan \kappa \right] \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{1+\kappa^2}}{1}} \quad (44)$$

$$C_0 = - \left[\int_{y'_2}^{y'_1} dy'_1 \int_{x'_2}^{x'_1} dx'_1 + \int_{y'_3}^{y'_2} dy'_2 \int_{x'_2}^{x'_3} dx'_2 \right] \frac{a_0 x'^2_2 + b_0 y'^2_2 + d_0 x'_1 + e_0 y'_1 + f_0}{1} \quad (45)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = a \cos^2 \alpha + b \sin^2 \alpha + c \cos \alpha \sin \alpha, \quad x'_1 = -\cot \alpha y', \\ b_0 = a \sin^2 \alpha + b \cos^2 \alpha - c \cos \alpha \sin \alpha, \quad x'_2 = \cos \alpha + \sin \alpha \tan \alpha, \\ d_0 = d \cos \alpha + e \sin \alpha, \quad x'_3 = \frac{1+\tan \alpha}{1-\tan \alpha} y', \\ e_1 = -d \sin \alpha + e \cos \alpha, \quad y'_1 = -\sin \alpha, \quad y'_2 = 0, \\ f_0 = f, \quad y'_3 = \cos \alpha - \sin \alpha \end{array} \right. \quad (46)$$

Рядукция интеграла

Ситуация № 1: $a_0 \neq 0$

Преобразование сдвига:

$$x_1 = x' + \frac{d_0}{2a_0}, \quad y_1 = y', \quad x_{1i} = x'_i + \frac{d_0}{2a_0} \quad (47)$$

$$C_{01} = - \left[\int_{y'_2}^{y'_1} dy_1 \int_{x_{12}}^{x_{11}} dx_1 + \int_{y'_3}^{y'_2} dy_1 \int_{x_{12}}^{x_{13}} dx_1 \right] \frac{a_0 x_1^2 + b_0 y_1^2 + e_0 y_1 + f_0 - d_0^2/4a_0}{1} \quad (48)$$

$$C_{01} = -\frac{1}{a_1} [\sin \alpha AT [a_1, b_{11}, c_{11}, d_{11}, e_{11}, f_{11}, g_{11}] +$$

$$+ (\cos \alpha - \sin \alpha) AT [a_1, b_{12}, c_{12}, d_{12}, e_{12}, f_{12}, g_{12}]] \quad (49)$$

$$AT [a, b, c, d, e, f, g] = \int_1^0 \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{dy} \left[\arctan \left[\frac{dy + e}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \right] - \right.$$

$$\left. - \arctan \left[\frac{fy + g}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \right] \right] \quad (50)$$

$$(51) \left\{ \begin{array}{l} a_{11} = b_0 \sin^2 \alpha / a_0, \\ b_{11} = -e_0 \sin \alpha / a_0 \\ c_{11} = c_{12} = \frac{f_0}{a_0} - \frac{d_0^2}{4a_0^2}, \\ d_{11} = -\tan \alpha \sin \alpha, \\ f_{11} = \cos \alpha, \\ g_{11} = g_{12} = \frac{d_0}{2a_0} \\ a_{12} = b_0 (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 / a_0, \\ b_{12} = e_0 (\cos \alpha - \sin \alpha) / a_0, \\ e_{11} = e_{12} = \cos \alpha + \sin \alpha \tan \alpha + d_0 / 2a_0, \\ d_{12} = \tan \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha), \\ f_{12} = \cos \alpha + \sin \alpha, \\ g_{12} = \frac{d_0}{2a_0} \end{array} \right.$$

⇒ Ситуация № 2: $a_0 \equiv 0, d_0 \neq 0$

$$(52) \quad C_{02} = - \left[\int_{y'_2}^{y'_1} dy' \int_{x'_2}^{x'_1} dx' + \int_{y'_3}^{y'_2} dy' \int_{x'_2}^{x'_3} dx' \right] \frac{b_0 y'^2_2 + d_0 x'_2 + e_0 y' + f_0}{1} = - \int_{y'_2}^{y'_1} dy' [\ln |b_0 y'^2_2 + d_0 x'^2_2| - \ln |b_0 y'^2_2 + e_0 y' + f_0 + d_0 x'^2_2|] - \int_{y'_3}^{y'_2} dy' [\ln |b_0 y'^2_2 + e_0 y' + f_0 + d_0 x'^2_2| - \ln |b_0 y'^2_2 + d_0 x'^2_3|]$$

$$C_{02} = -\sin \alpha [\mathcal{I}(a_{21}, b_{21}, c_{21}) + \mathcal{I}(a_{22}, b_{22}, c_{22})] -$$

$$-(\cos \alpha - \sin \alpha) [\mathcal{I}(a_{23}, b_{23}, c_{23}) + \mathcal{I}(a_{24}, b_{24}, c_{24})] \quad (53)$$

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{21} = a_{22} = b_0 \sin^2 \alpha, \\ c_{21} = c_{23} = \frac{f_0}{a_0} - \frac{d_0^2}{4a_0^2}, \\ c_{22} = c_{24} = f_0, \\ a_{23} = a_{24} = b_0(\cos \alpha - \sin \alpha)^2, \\ b_{21} = \sin \alpha(d_0 \tan \alpha - e_0), \\ b_{22} = -(d_0 \cos \alpha + e_0 \sin \alpha), \\ b_{23} = (b_0 + d_0 \tan \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha), \\ b_{24} = (d_0 + e_0) \cos \alpha + (d_0 - e_0) \sin \alpha, \end{array} \right.$$

интеграл \mathcal{I} определяется выражением (33).

⇒ **Ситуация № 3:** $a_0 \equiv 0, d_0 \equiv 0$

$$C_{03} = - \left[\int_{y'_2}^{y'_1} dy' \int_{x'_2}^{x'_1} dx' + \int_{y'_3}^{y'_2} dy' \int_{x'_2}^{x'_3} dx' \right] \frac{b_0 y'_2 + e_0 y' + f_0}{1} =$$

$$= - \int_{y'_2}^{y'_1} \frac{dy}{(x'_2 - x'_1) dy} - \int_{y'_3}^{y'_2} \frac{dy}{(x'_2 - x'_3) dy} \quad (55)$$

или

где

$$C_{03} = \mathcal{F}[a_{31}, b_{31}, c_{31}, d_{31}, e_{31}] + \mathcal{F}[a_{32}, b_{32}, c_{32}, d_{32}, e_{32}] \quad (56)$$

$$\mathcal{F}[a, b, c, d, e] = \int_1^0 \frac{dy}{dy + e} = \int_0^1 \frac{dy}{ay_2 + by + c} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2a} \left[d \ln \left[1 + \frac{c}{a+b} \right] + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2(bd-2ae)} \left[\operatorname{arctanh} \left[\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{b+2a} \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{arctanh} \left[\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{b} \right] \right] \right], \quad \text{при } a, b, d \neq 0 \\ \frac{b}{d} + \frac{bc-d}{b^2} \ln \left[1 + \frac{c}{b} \right], \quad \text{при } a \equiv 0, b, d \neq 0 \\ \frac{d}{e} + \frac{c}{e}, \quad \text{при } a, b \equiv 0, d \neq 0 \\ \infty, \quad \text{при } c \equiv 0 \end{array} \right. \quad (57)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{31} = b_0 \sin^2 \alpha, \quad a_{32} = b_0 (\cos \alpha - \sin \alpha)^2, \\ b_{31} = -e_0 \sin \alpha, \quad b_{32} = e_0 (\cos \alpha - \sin \alpha), \\ c_{31} = c_{32} = f_0, \quad d_{31} = -e_{31} = \sin \alpha (\sin \alpha \tan \alpha + \cos \alpha), \\ d_{32} = -e_{32} = \cos \alpha - \sin \alpha (\sin \alpha \tan \alpha + \cos \alpha), \end{array} \right. \quad (58)$$

$$(59) \quad C_0(p_1^2, p_2^2, p_1 p_2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = \begin{cases} a_0, d_0 \neq 0; \Rightarrow C_{01}, \\ a_0 \equiv 0, d_0 \neq 0, \Rightarrow C_{02}, \\ a_0, d_0 \equiv 0, \Rightarrow C_{03}. \end{cases}$$

6. Заключение

В данной работе:

- Рассмотрен сценарий алгебраической редукции N - точечных скалярных интегралов, основанный на методе ветвления. Представлена общая схема вычисления данных интегралов в рамках рассматриваемого подхода.

- Получены новые наборы возможных решений для одно-, двух-, трехточечных скалярных функций, представленных как в терминах элементарных функций так и в виде однократных интегралов.

- Полученные результаты находятся в хорошем согласии с результатами, полученными ранее для отдельных частных случаев.

[14] G.C. Devizze, G.R. Jibuti// E-print:hep-ph/9710283, 11pp.

[3] G. J. van Oldenborgh, J. A. M. Vermaseren// Z. Phys. C46, (1990), 425-438.

- Построена программа *ScalarInt2.0* для расчета указанных интегралов в среде *Mathematica*. Данная программа была опробована при вычислении радиационных поправок к вершинным функциям взаимодействия бозонов Хиггса в рамках модели МСМ.