НОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ РЕДУКЦИИ B_0, C_0 СКАЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

© 2005   Ю.П. Филиппов

Аннотация

В работе представлены полные наборы возможных решений для двух-, и трехточечного однопетлевых скалярных интегралов. Данные результаты получены на основе детального анализа поведения подинтегральной функции и применения алгоритма ветвления при построения итогового результата. В редукции C_0 – функции задействован $O(2)$ – поворот в пространстве параметров Фейнмана.

1. Введение

На коллайдерах будущего поколения, таких как LHC и ILC теоретические прогнозы стандартной модели (SM) и ее модификаций смогут быть проверены в высокоточном сравнительном анализе результатов теории и эксперимента. Чтобы выполнить такой анализ, необходимо обеспечить как высокую разрешающую способность эксперимента, так и соответствующий уровень точности предсказаний теории. Расчет наблюдаемых величин как в SM, так и в ее модификациях традиционно проводится в рамках теории возмущений. Для планируемых экспериментов достаточный уровень теоретических расчетов может быть достигнут посредством учета однопетлевых радиационных поправок к наблюдаемым. В выражении для амплитуды процесса фигурируют комбинации одно-, двух-, трех-, четырехточечных скалярных однопетлевых интегралов. Для получения численного результата необходимо вычислить указанные интегралы.

В 1979 году Дж. т'Хоофтом, М. Велтманом, Г. Пассарино в работах [1] - [2] был предложен алгоритм вычисления данных интегралов в общем случае. В частности, здесь было впервые получено выражение для трехточечного скалярного интеграла C_0, представляющего в общем случае сумму 12 дилогарифмов (функций Спенса). Однако использовать общие решения для указанных интегралов в аналитических расчетах наблюдаемых было не всегда удобным, в силу их громоздкости и потери точности в вычислениях, в ряде частных случаев. Попытка заложить данный алгоритм в машинные коды и, таким образом, автоматизировать процесс вычисления не увенчалась успехом. Так, в расчетах радиационных поправок с помощью программы FormF, созданной М. Велтманом, в отдельных случаях при получении промежуточных результатов необходимо было удерживать точность в 120 знаков после запятой, что добиться корректной численной редукции результата! Это приводило к тому, что процесс вычисления был крайне медленным и иногда вообще невозможным в силу ограниченных возможностей ЭВМ [3].

Указанные проблемы подтолкнули многих физиков и математиков к поиску новых подходов и методов вычисления данных интегралов. Г. Олденбург и Дж. Вермасерен в работе [3] предложили усовершенствованный алгоритм вычисления данных интегралов с использованием кинематических детерминантов. Метод интегрирования с использованием представления Меллина-Барнса [4]-[6], полиномиальная техника Гейджинбауэра [7], метод интегрирования по частям [8], метод интегрирования в пространстве с отрицательной размерностью [9, 10], подход, основанный на интегрировании функций, разложенных в ряд [11], метод дифференциальных уравнений [12] и другие подходы и методы [13]-[25] были раработаны для расчета фейнмановских интегралов и в частности указанных.

Т.о. можно выделить две основные тенденции в развитии теории вычисления интегралов Фейнмана: (I) построение обобщенных аналитических структур – результатов расчета указанных интегралов, (II) решение проблем численного интегрирования, адаптация аналитических решений к машинным алгоритмам. В связи с быстрым ростом возможностей автоматизации квантов-полевых вычислений и необходимостью проведения расчетов по теории возмущений с большим количеством ($\sim 10^3$) петлевых диаграмм, многие специалисты находят второе направление исследований актуальным и весьма необходимым. Это и потому, что многие вопросы численного расчета указанных интегралов еще вызывают определенные дискуссии.

Автор данной работы придерживается второй тенденции. По его мнению основное количество технических проблем в численном интегрировании обусловлено

- непреднамеренным выходом в комплексную плоскость переменной интегрирования, когда это можно избежать, тем самым уменьшить ошибку вычислений;
- трудностями учета большого многообразия свойств специальных функций при написании программ, способствующих редукции итогового результата;
- в традиционных алгоритмах редукции интеграла нередко проводятся замены переменных, справедливые лишь при определенных значениях параметров преобразования. Выход за пределы области допустимых значений приводит к появлению сингулярных результатов, неустраняемых программой автоматически.

Автор данной работы видит устранение указанных трудностей в детальном анализе поведения подинтегральной функции и применении алгоритма ветвления для поиска (по возможности) действительной первообразной, имеющей место в определенной области пространства параметров интеграла. Основной целью данной работы является построение системы всевозможных решений для указанных интегралов, справедливых в определенной области пространства параметров, с явным выделением действительной и мнимой части.

2. Общая схема расчета

Для устранения ультрафиолетовых расходимостей и вычисления конечной части скалярных однопетлевых интегралов используется метод размерной регуляризации - процедура переопределения подинтегральной функции с целью представления соответствующего интеграла в виде суммы двух слагаемых: расходящегося (полюс) и конечной части. Метод размерной регуляризации может быть представлен следующей системой этапов.

1. *Переход в $\mathcal{D}$ - мерное пространство.* Рассматривается аналог исходной функции в $\mathcal{D}$ - мерном пространстве Минковского ($\mathcal{D} < 4$). Это продиктовано необходимостью дальнейших манипуляций с данным интегралом как с ограниченной гладкой функцией. При этом исходная скалярная функция есть предел $\mathcal{D}$ - мерного аналога при $\mathcal{D} \to 4$, т. е.

$$\lim_{\mathcal{D}\to 4} \mu^{4-\mathcal{D}} \int \frac{d^{\mathcal{D}}q}{(2\pi)^{\mathcal{D}}} [...] = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [...] \,, \tag{2.1}$$

здесь μ - параметр размерной регуляризации, обеспечивающий сохранение массовой размерности данного интеграла в $\mathcal{D}$ измерениях и, следовательно, сохранение калибровочной инвариантности модели.

2. *Параметризация Фейнмана.* Подинтегральная функция в (2.1) определяется произведением пропагаторов промежуточных состояний. В таком виде интегрирование по импульсу затруднительно. Для интегрирования необходимо добиться, чтобы подинтегральная функция имела вид типа $1/[q^2+M^2]^N$. Это достигается посредством переопределения подинтегральной функции с помощью следующего соотношения Фейнмана [26][1]:

$$\frac{1}{D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}...D_N^{\alpha_N}}=\frac{\Gamma(\sum_{i=1}^N\alpha_i)}{\prod_{i=1}^N\Gamma(\alpha_i)}\underbrace{\int_0^1...\int_0^1}_{N}dx_1dx_2...dx_N\delta\left[1-\sum_{i=1}^N x_i\right]\times\frac{x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2-1}...x_N^{\alpha_N-1}}{\left(\sum_{i=1}^N D_ix_i\right)^{\left(\sum_{i=1}^N\alpha_i\right)}}\,. \quad (2.2)$$

В результате в подинтегральном выражении, в знаменателе, образуются слагаемые нулевой, первой и второй степени по переменной q. Выделяя полный квадрат и переходя к новой переменной q', посредством сдвига импульса на конечную величину приходим к необходимой структуре.

3. *Поворот Вика. Интегрирование в $\mathcal{D}$ - мерном евклидовом пространстве.* Вычисление интеграла по импульсу можно осуществить лишь в $\mathcal{D}$ - мерном евклидовом пространстве. Для перехода в указанное пространство необходимо произвести поворот Вика:

$$\left\{q_0^{'}\to iq_0^E,\quad q_i^{'}\to q_i^E, i=\overrightarrow{1,\mathcal{D}-1}\right\}\quad\Rightarrow\quad\left\{dq^{\,'}\to idq_E,\quad q^{'\,2}\to -q_E^2\right\}. \quad (2.3)$$

Интеграл по переменной q_E, вычисляется согласно следующему результату:

$$\int\frac{d^{\mathcal{D}}q_E}{[q_E^2+M^2]^n}=\pi^{\frac{\mathcal{D}}{2}}\frac{\Gamma(n-\frac{\mathcal{D}}{2})}{\Gamma(n)}(M^2)^{-(n-\frac{\mathcal{D}}{2})}. \quad (2.4)$$

4. *Предельный переход $\mathcal{D}\to 4$. Дифференциация результата.* В полученном выражении выделяется расходящаяся и конечная части. Затем осуществляется предельный переход $\mathcal{D}\to 4-0$. При этом, как правило, используется разложение Γ - функции и показательной функции:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Gamma(-n+\varepsilon)=\frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{1}{\varepsilon}+\tilde{\psi}(n+1)+\mathcal{O}(\varepsilon)\right],\qquad a^{\varepsilon}=1+\varepsilon\ln a,\quad \text{при}\quad \varepsilon\to 0, \quad (2.5)$$

где $\tilde{\psi}(n+1)=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\gamma_e$, $\gamma_e=0.5772157$ - постоянная Эйлера-Маскерони; параметр $\varepsilon=4-\mathcal{D}$. Расходящаяся часть интеграла (если таковая имеется) будет определяться выражением:

$$\Delta_{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{2}{\varepsilon}+\ln(4\pi)-\gamma_e\right]. \quad (2.6)$$

5. *Редукция конечной части интеграла.* Основную роль при вычислении наблюдаемых играет конечная часть скалярных интегралов (именно она определяет амплитуду процесса), поэтому необходимо редуцировать последнюю. В предлагаемом сценарии редукции можно выделить следующие основные моменты:

[1]Отметим, что параметры D_i, в общем случае, должны быть комплексными, чтобы избежать ситуаций с сингулярностями в пространстве 4-импульсов. Именно поэтому будет в последующем вводится малая мнимая добавка $i\delta$ в знаменателях D_i соответствующих пропагаторов.

- необходимо провести детальный анализ поведения подинтегральной функции и выявить возможные варианты вычисления первообразной, соответствующие определенным областям пространства параметров скалярной функции;
- вычисляем первообразные в каждом возможном варианте, избегая по возможности выхода в комплексную плоскость переменной интегрирования;
- решение в каждом варианте представляется в дифференцированной форме - в виде суммы действительной и мнимой части. Итоговый результат, используя алгоритм ветвления, представляется разветвленной системой всевозможных редуцированных решений.

3. Двухточечная скалярная функция B_0

Данная функция соответствует однопетлевой двухточечной диаграмме Фейнмана, характеризуется логарифмической ультрафиолетовой расходимостью и представляется в виде:

$$\frac{i}{16\pi^2}B_0(p^2,m_1^2,m_2^2) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{(q^2-m_1^2+i\delta)((q+p)^2-m_2^2+i\delta)}. \tag{3.7}$$

$\mathcal{D}$ - мерный аналог в пространстве Минковского представляется следующим выражением

$$\frac{i}{16\pi^2}B_0^{\mathcal{D}}(p^2,m_1^2,m_2^2) = \mu^{4-\mathcal{D}}\int \frac{d^{\mathcal{D}}q}{(2\pi)^{\mathcal{D}}}\frac{1}{(q^2-m_1^2+i\delta)((q+p)^2-m_2^2+i\delta)}. \tag{3.8}$$

Параметризация Фейнмана осуществляется посредством (2.2), которое в данном случае принимает вид

$$\frac{1}{D_1D_2} = \int_0^1 \frac{1}{[D_1x+D_2(1-x)]^2}, \tag{3.9}$$

здесь

$$D_1 = ((q+p)^2-m_2^2+i\delta), \qquad D_2 = (q^2-m_1^2+i\delta) \tag{3.10}$$

Следовательно, выражение (3.8) можно представить в виде

$$\frac{i}{16\pi^2}B_0^{\mathcal{D}}(p^2,m_1^2,\,m_2^2) = \mu^{4-\mathcal{D}}\int_0^1 dx\,\times$$
$$\times\int\frac{d^{\mathcal{D}}q}{(2\pi)^{\mathcal{D}}}\frac{1}{[x((q+p)^2-m_2^2+i\delta)+(q^2-m_1^2+i\delta)(1-x)]^2}. \tag{3.11}$$

Преобразуем знаменатель дроби подинтегрального выражения

$$x((q+p)^2-m_2^2+i\delta)+(q^2-m_1^2+i\delta)(1-x) = {q'}^2-M^2, \tag{3.12}$$
$$\text{где}\quad q' = q+p\,x,\quad M^2 = p^2x^2-x(p^2+m_1^2-m_2^2)+m_1^2-i\delta. \tag{3.13}$$

Осуществляя сдвиг импульса на конечную величину и поворот Вика, выражение (3.11) можно представить в виде:

$$\frac{i}{16\pi^2}B_0^{\mathcal{D}}(p^2,m_1^2,m_2^2) = \frac{i\mu^{4-\mathcal{D}}}{(2\pi)^{\mathcal{D}}}\int_0^1 dx\int\frac{d^{\mathcal{D}}q_E}{[q_E^2+M^2]^2}. \tag{3.14}$$

Воспользуемся результатом (2.4) для внутреннего интеграла (3.14). Следовательно, интеграл (3.14) можно представить в виде:

$$\frac{i}{16\pi^2} B_0^{\mathcal{D}}(p^2, m_1^2, m_2^2) = \frac{i}{16\pi^2} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \int_0^1 dx \left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{3.15}$$

Принимая во внимание (2.5), которые в данном случае принимают вид:

$$\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln\left[\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right] \tag{3.16}$$

выражение (3.15) можно представить в виде:

$$B_0^{\mathcal{D}}(p^2, m_1^2, m_2^2) = \left[\frac{2}{4-\mathcal{D}} + \ln(4\pi) - \gamma_e - \int_0^1 dx \ln\frac{M^2}{\mu^2}\right]. \tag{3.17}$$

В пределе $\mathcal{D} \to 4$ имеем

$$B_0(p^2, m_1^2, m_2^2) = \lim_{\mathcal{D}\to 4} B_0^{\mathcal{D}}(p^2, m_1^2, m_2^2) = \left[\Delta_\varepsilon + \ln\mu^2 - \mathcal{I}(p^2, m_1^2, m_2^2)\right]. \tag{3.18}$$

где Δ_ε определяется выражением (2.6) и вместе со слагаемым $\ln\mu^2$ исключается из итогового результата для амплитуды посредством стандартной процедуры перенормировки [27]. Интеграл $\mathcal{I}$ имеет вид [2]:

$$\mathcal{I}(p^2, m_1^2, m_2^2) = \int_0^1 dx \ln M^2 = \int_0^1 dx \ln\left[ax^2 + bx + c\right], \tag{3.19}$$

$$a = p^2, \quad b = -(p^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad c = m_1^2 \ (\delta \to 0). \tag{3.20}$$

Вычисление интеграла $\mathcal{I}$ не является тривиальным, поскольку сценарий поиска первообразной существенно зависит от значений параметров a, b, c. Следовательно все пространство значений параметров a, b, c распадается на ряд областей, в каждом из которых первообразная имеет определенную структуру. Данные структуры не могут быть сведены к одной универсальной форме и должны быть исследованы индивидуально. В связи со сказанным исследуем данный интеграл во всевозможных областях пространства значений параметров.

Рассмотрим квадратный трехчлен подинтегрального выражения.

Ситуация № 1: $a, b, c \in \Re$ при этом $a \neq 0$.

Известно, что всякий квадратный трехчлен можно представить в виде:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \tag{3.21}$$

где x_1, x_2 – корни соответствующего квадратного уравнения: $ax^2 + bx + c = 0$. Исследуем область значений x_1, x_2 в зависимости от значений a, b, c. Рассмотрим детерминант последнего уравнения:

$$\mathfrak{D} = b^2 - 4ac = \lambda(p^2, m_1^2, m_2^2), \tag{3.22}$$

где

$$\lambda(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz). \tag{3.23}$$

[2]Здесь и далее будем полагать, что параметры a, b, c, μ являются безразмерными величинами, поскольку априорно предполагается, что определяющие их кинематические характеристики выражены в одной системе единиц и эти единицы могут быть полностью исключены из рассмотрения в выражении (3.17).

Вариант № 1: $\mathfrak{D} \geq 0$, (т.е. $p^2 \geq (m_1+m_2)^2 \cup p^2 \leq (m_1-m_2)^2$): существуют два действительных корня уравнения (3.22):

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac} = \frac{1}{2} + \frac{m_1^2-m_2^2}{2p^2} \pm \frac{1}{2p^2}\sqrt{\lambda(p^2,m_1^2,m_2^2)}. \quad (3.24)$$

Следовательно, выражение для $\mathcal{I}$ может быть представлено в виде:

$$\mathcal{I}_{11} = \int_0^1 dx \ln\left[a(x-x_1)(x-x_2)\right] = \ln a + \int_0^1 dx \ln\left[x-x_1\right] + \int_0^1 dx \ln\left[x-x_2\right], \quad (3.25)$$

учитывая, что

$$\int_0^1 dx \ln\left[x-x_0\right] = (1-x_0)\ln|1-x_0| + x_0 \ln|x_0| - 1 + \\ + i\pi\left[\theta(x_0-1-\epsilon) + x_0\theta(x_0)\theta(1-x_0)\right], \quad (3.26)$$

выражение (3.25) представляется в виде:

$$\mathcal{I}_{11} = \ln|a| + i\pi\theta(-a) - 2 + \sum_{i=1}^{2}\left[(1-x_i)\ln|1-x_i| + x_i\ln|x_i| + \right. \\ \left. + \; i\pi\left[\theta(x_i-1-\epsilon_i) + x_i\theta(x_i)\theta(1-x_i)\right]\right], \quad (3.27)$$

здесь ϵ_i – сколь угодно малая положительная величина, для которой всегда выполняется условие $\epsilon_i < |x_i - 1|$, при $x_i \neq 1$.

Вариант № 2: $\mathfrak{D} < 0$, (т.е. $(m_1-m_2)^2 < p^2 < (m_1+m_2)^2$). В этом случае x_1, x_2 являются комплексными и воспользоваться выражением (3.25) без выхода в комплексную плоскость переменной интегрирования невозможно. Выделим полный квадрат в аргументе логарифма по переменной x.

$$\mathcal{I}_{12} = \int_0^1 dx \ln\left[ax^2+bx+c\right] = \int_0^1 dx\left[\ln a + \ln\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]\right] = \ln a + \\ \int_0^1 dx \ln\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{1}{4a^2}(4ac-b^2)\right] = \ln a + \int_{\eta_1}^{\eta_2} dx' \ln\left[x'^2 + d^2\right]. \quad (3.28)$$

В последнем выражении выполнена следующая замена:

$$\{x' = x + \frac{b}{2a}, \eta_2 = 1 + \frac{b}{2a}, \eta_1 = \frac{b}{2a}, d = \frac{1}{2|a|}\sqrt{-\mathfrak{D}}\}. \quad (3.29)$$

Учитывая значение интеграла правой части (3.28)

$$\int \ln\left[x^2+d^2\right] dx = x\ln\left[x^2+d^2\right] - 2x + 2d\arctan\frac{x}{d}, \quad (3.30)$$

данное выражение можно записать в виде:

$$\mathcal{I}_{12} = \ln a + \eta_2\ln\left[\eta_2^2+d^2\right] - \eta_1\ln\left[\eta_1^2+d^2\right] - 2(\eta_2-\eta_1) + \\ 2d\left(\arctan\frac{\eta_2}{d} - \arctan\frac{\eta_1}{d}\right) \quad (3.31)$$

или

$$\mathcal{I}_{12} = \ln|a| + i\pi\theta(-a) + \left(1+\frac{b}{2a}\right)\ln\left[1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right] - \frac{b}{2a}\ln\frac{c}{a} - 2 + \frac{\sqrt{-\lambda(p^2,m_1^2,m_2^2)}}{a}\times$$

$$\times\left[\arctan\left[\frac{b+2a}{\sqrt{-\lambda(p^2,m_1^2,m_2^2)}}\right] - \arctan\left[\frac{b}{\sqrt{-\lambda(p^2,m_1^2,m_2^2)}}\right]\right]. \quad (3.32)$$

Совокупностью результатов (3.27), (3.32) исчерпывается ситуация с $a \neq 0$.

Ситуация № 2: $a,b,c \in \Re$, при этом $a=0, b\neq 0$.

Преобразуя интеграл к виду

$$\mathcal{I}_2 = \int_0^1 dx \ln[bx+c] = \int_0^1 dx\ln[b] + \int_0^1 dx\ln[x+c/b] \quad (3.33)$$

и используя результат (3.26), можно записать

$$\mathcal{I}_2 = \int_0^1 dx\ln[bx+c] = \ln|b| + \left(1+\frac{c}{b}\right)\ln\left|1+\frac{c}{b}\right| - \frac{c}{b}\ln\left|\frac{c}{b}\right| - 1 +$$

$$+ i\pi\left[1+\theta(-b) - \theta\left(1+\frac{c}{b}+\epsilon\right) - \frac{c}{b}\theta\left(-\frac{c}{b}\right)\theta\left(1+\frac{c}{b}\right)\right]. \quad (3.34)$$

Ситуация № 3: $a,b,c\in\Re$, при этом $a=0, b=0, c\neq 0$.

$$\mathcal{I}_3 = \int_0^1 dx\ln c = \ln|c| + i\pi\theta(-c) \quad (3.35)$$

В итоге выражение для интеграла $\mathcal{I}_0(p^2,m_1^2,m_2^2)$ во всевозможных областях пространства параметров a,b,c представляется в виде:

$$\mathcal{I} = \left\{\begin{array}{l} \text{если} \quad a\neq 0, \quad \text{то} \quad \mathcal{I}_1 = \left\{\begin{array}{ll} \mathcal{I}_{11}, (3.27), & \text{если} \quad \mathfrak{D}\geq 0, \\ \mathcal{I}_{12}, (3.32), & \text{если} \quad \mathfrak{D} < 0 \end{array}\right\}, \\ \text{если} \quad a=0, b\neq 0, \quad \text{то} \quad \mathcal{I}_2, (3.34), \\ \text{если} \quad a,b=0, c\neq 0, \quad \text{то} \quad \mathcal{I}_3, (3.35) \end{array}\right\}. \quad (3.36)$$

4. Трехточечная скалярная функция C_0

Трехточечная скалярная функция C_0 не имеет ультрафиолетовой расходимости, соответствует трехточечной диаграмме и определяется выражением вида:

$$\frac{i}{16\pi^2}C_0(p_1^2,p_2^2,p_1p_2,m_1^2,m_2^2,m_3^2) = \int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\times$$

$$\times\frac{1}{(q^2-m_1^2+i\delta)((q+p_1)^2-m_2^2+i\delta)((q+p_2)^2-m_3^2+i\delta)}. \quad (4.37)$$

Воспользуемся выражением (2.2), которое в данном случае принимает вид [3]:

$$\frac{1}{D_1D_2D_3} = 2\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{dy}{\left[D_1(1-x-y)+D_2x+D_3y\right]^3}, \quad (4.38)$$

[3] Скалярные функции C_0, D_0 не имеют ультрафиолетовой расходимости, поэтому уже нет необходимости в использовании метода размерной регуляризации и, следовательно, в рассмотрении $\mathcal{D}$ - мерных аналогов указанных функций. В силу сказанного, в дальнейшем мы будем работать в 4 - мерном пространстве.

здесь

$$D_1 = (q^2 - m_1^2 + i\delta), \qquad D_2 = ((q+p_1)^2 - m_2^2 + i\delta), \qquad D_3 = ((q+p_2)^2 - m_3^2 + i\delta), \tag{4.39}$$

в результате получаем

$$\frac{i}{16\pi^2} C_0(p_1^2, p_2^2, p_1p_2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \times \\ \frac{1}{\left[(q^2 - m_1^2 + i\delta)(1-x-y) + x((q+p_1)^2 - m_2^2 + i\delta) + y((q+p_2)^2 - m_3^2 + i\delta)\right]^3}. \tag{4.40}$$

Преобразуем знаменатель подинтегрального выражения и произведем следующую замену:

$$\left\{ \begin{array}{l} q^{'} = q + p_1 x + p_2 y, \\ M^2 = p_1^2 x^2 + p_2^2 y^2 + 2p_1p_2 xy - p_1^2 x - p_2^2 y + m_2^2 x + m_3^2 y + m_1^2(1-x-y) - i\delta \end{array} \right\}, \tag{4.41}$$

следовательно, выражение (4.40) может быть представлено в следующей форме

$$\frac{i}{16\pi^2} C_0(p_1^2, p_2^2, p_1p_2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4q^{'}}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[q^{'\,2} - M^2\right]^3}. \tag{4.42}$$

Осуществляя поворот Вика (2.3) и, учитывая результат (2.4) в случае $\mathcal{D} = 4$, $n = 3$, приходим к следующему результату:

$$C_0(p_1^2, p_2^2, p_1p_2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = -\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{M^2} \tag{4.43}$$

Выполним замену переменных вида $y \to 1-y$, сменим порядок интегрирования и произведем переобозначение $x \leftrightarrow y$, в итоге

$$C_0(p_1^2; p_2^2; p_1p_2; m_1^2; m_2^2; m_3^2) = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{dy}{ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f}, \tag{4.44}$$

где[4]

$$\left\{ \begin{array}{l} a = -p_2^2,\ b = -p_1^2,\ c = 2(p_1p_2),\ d = p_2^2 + m_3^2 - m_1^2, \\ e = p_1^2 + m_1^2 - 2p_1p_2 - m_2^2,\ f = -m_3^2 + i\delta \end{array} \right\}. \tag{4.45}$$

Произведем преобразование поворота на плоскости OXY:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{4.46}$$

На угол α будем налагать ограничение, соответствующее равенству нулю коэффициента при $x'y'$, это приводит к уравнению вида:

$$c\cos 2\alpha - (a-b)\sin 2\alpha = 0, \qquad \text{или} \qquad \tan 2\alpha = \frac{c}{a-b} = \kappa. \tag{4.47}$$

Данное уравнение всегда имеет действительное решение, если a, b, c являются действительными параметрами. Несложные математические выкладки приводят к следующим выражениям для $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$:

[4] Здесь и далее полагаем, что вектора p_1, p_2 являются временеподобными, т.е. $p_i^2 = p_{0i}^2 - \vec{p}_i^{\,2} \geq 0$.

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+\kappa^2}}};\ \sin\alpha = sgn\left[\arctan\kappa\right]\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+\kappa^2}}}\,. \tag{4.48}$$

В итоге выражение для C_0 представляется в виде (при $x \leftrightarrow y$):

$$C_0 = \left[\int_{y'_1}^{y'_2} dy' \int_{x'_1}^{x'_2} dx' + \int_{y'_2}^{y'_3} dy' \int_{x'_3}^{x'_2} dx'\right] \frac{1}{a_0 x'^2 + b_0 y'^2 + d_0 x' + e_0 y' + f_0}, \tag{4.49}$$

где

$$\left\{\begin{array}{ll} a_0 = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha + c\cos\alpha\sin\alpha, & x'_1 = -\cot\alpha y', \\ b_0 = a\sin^2\alpha + b\cos^2\alpha - c\cos\alpha\sin\alpha, & x'_2 = \tan\alpha y' + \cos\alpha + \sin\alpha\tan\alpha, \\ d_0 = d\cos\alpha + e\sin\alpha, & x'_3 = \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} y', \\ e_1 = -d\sin\alpha + e\cos\alpha, & y'_1 = -\sin\alpha,\ y'_2 = 0, \\ f_0 = f, & y'_3 = \cos\alpha - \sin\alpha \end{array}\right\}. \tag{4.50}$$

Ситуация № 1: $a \neq 0$.

Произведем преобразование сдвига следующего вида:

$$x_1 = x' + \frac{d_0}{2a_0},\ \ y_1 = y',\ \ x_{1i} = x'_i + \frac{d_0}{2a_0}, \tag{4.51}$$

тогда

$$C_{01} = \left[\int_{y'_1}^{y'_2} dy_1 \int_{x_{11}}^{x_{12}} dx_1 + \int_{y'_2}^{y'_3} dy_1 \int_{x_{13}}^{x_{12}} dx_1\right] \frac{1}{a_0 x_1^2 + b_0 y_1^2 + e_0 y_1 + f_0 - d_0^2/4a_0}; \tag{4.52}$$

снимая интеграл по переменной x_1 и проводя замену - в первом интеграле $y_1 \to y_1/y'_1$, во втором - $y_1 \to y_1/y'_3$, получаем следующее выражение для C_0-интеграла:

$$\begin{aligned} C_{01} = &\ \frac{1}{a_1}\left[\sin\alpha\mathcal{AT}\left[a_1, b_{11}, c_{11}, d_{11}, e_{11}, f_{11}, g_{11}\right] + \right. \\ &+ \left.(\cos\alpha - \sin\alpha)\mathcal{AT}\left[a_1, b_{12}, c_{12}, d_{12}, e_{12}, f_{12}, g_{12}\right]\right], \end{aligned} \tag{4.53}$$

здесь

$$\begin{aligned} \mathcal{AT}\left[a, b, c, d, e, f, g\right] = &\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\left[\arctan\left[\frac{dy + e}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\right] - \right. \\ &- \left.\arctan\left[\frac{fy + g}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\right]\right], \end{aligned} \tag{4.54}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11} = b_0\sin^2\alpha/a_0, & a_{12} = b_0(\cos\alpha - \sin\alpha)^2/a_0, \\ b_{11} = -e_0\sin\alpha/a_0 & b_{12} = e_0(\cos\alpha - \sin\alpha)/a_0, \\ c_{11} = c_{12} = \frac{f_0}{a_0} - \frac{d_0^2}{4a_0^2}, & e_{11} = e_{12} = \cos\alpha + \sin\alpha\tan\alpha + d_0/2a_0, \\ d_{11} = -\tan\alpha\sin\alpha, & d_{12} = \tan\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha), \\ f_{11} = \cos\alpha, & f_{12} = \cos\alpha + \sin\alpha, \\ g_{11} = g_{12} = \frac{d_0}{2a_0} & \end{array}\right\}. \tag{4.55}$$

Очевидно, что $\mathcal{AT}$ - функция всегда дает действительный результат и не имеет точек сингулярного поведения подинтегральной функции.

Ситуация № 2: $a_0 \equiv 0, d_0 \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
C_{02} &= \left[\int_{y_1'}^{y_2'} dy' \int_{x_1'}^{x_2'} dx' + \int_{y_2'}^{y_3'} dy' \int_{x_3'}^{x_2'} dx'\right] \frac{1}{b_0 y'^2 + d_0 x' + e_0 y' + f_0} = \\
&= \frac{1}{d_0} \int_{y_1'}^{y_2'} dy \left[\ln[b_0 y^2 + e_0 y + f_0 + d_0 x_2'] - \ln[b_0 y^2 + e_0 y + f_0 + d_0 x_1']\right] + \\
&+ \frac{1}{d_0} \int_{y_2'}^{y_3'} dy \left[\ln[b_0 y^2 + e_0 y + f_0 + d_0 x_2'] - \ln[b_0 y^2 + e_0 y + f_0 + d_0 x_3']\right]. \qquad (4.56)
\end{aligned}
$$

Как и в предыдущем случае, проводим замену: в первом интеграле - $y \to y/y_1'$, во втором - $y \to y/y_3'$, в результате получаем следующее выражение:

$$
\begin{aligned}
C_{02} &= \frac{\sin\alpha}{d_0} \left[\mathcal{I}(a_{21}, b_{21}, c_{21}) + \mathcal{I}(a_{22}, b_{22}, c_{22})\right] + \\
&+ \frac{(\cos\alpha - \sin\alpha)}{d_0} \left[\mathcal{I}(a_{23}, b_{23}, c_{23}) + \mathcal{I}(a_{24}, b_{24}, c_{24})\right], \qquad (4.57)
\end{aligned}
$$

где интеграл $\mathcal{I}$ определяется выражениями (3.19),(3.36), а параметры последних есть

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
a_{21} = a_{22} = b_0 \sin^2\alpha, & b_{21} = -\sin\alpha(d_0 \tan\alpha + e_0), \\
a_{23} = a_{24} = b_0(\cos\alpha - \sin\alpha)^2, & b_{22} = (d_0 \cos\alpha - e_0 \sin\alpha), \\
c_{21} = c_{23} = d_0/\cos\alpha + f_0, & b_{23} = (e_0 + d_0 \tan\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha), \\
c_{22} = c_{24} = f_0, & b_{24} = (d_0 + e_0)\cos\alpha + (d_0 - e_0)\sin\alpha,
\end{array}
\right\}. \qquad (4.58)
$$

Ситуация № 3: $a_0 \equiv 0, d_0 \equiv 0$.

В данном случае интеграл представляется в виде:

$$
\begin{aligned}
C_{03} &= \left[\int_{y_1'}^{y_2'} dy' \int_{x_1'}^{x_2'} dx' + \int_{y_2'}^{y_3'} dy' \int_{x_3'}^{x_2'} dx'\right] \frac{1}{b_0 y'^2 + e_0 y' + f_0} = \\
&= \int_{y_1'}^{y_2'} \frac{(x_2' - x_1') dy}{b_0 y^2 + e_0 y + f_0} + \int_{y_2'}^{y_3'} \frac{(x_2' - x_3') dy}{b_0 y^2 + e_0 y + f_0} \qquad (4.59)
\end{aligned}
$$

или

$$
C_{03} = \mathcal{F}[a_{31}, b_{31}, c_{31}, d_{31}, e_{31}] + \mathcal{F}[a_{32}, b_{32}, c_{32}, d_{32}, e_{32}], \qquad (4.60)
$$

где

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[a,b,c,d,e] &= \int_0^1 dy \frac{dy + e}{ay^2 + by + c} = \\
&= \left\{
\begin{array}{l}
\frac{1}{2a}\left[d \ln\left[1 + \frac{a+b}{c}\right] + \frac{2(bd - 2ae)}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\left[arctanh\left[\frac{b+2a}{\sqrt{b^2-4ac}}\right] - \right.\right. \\
\left.\left. - arctanh\left[\frac{b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right]\right]\right], \quad \text{при} \quad a, b, c \neq 0, \\
\frac{d}{b} + \frac{be - cd}{b^2} \ln\left[1 + \frac{b}{c}\right], \quad \text{при} \quad a \equiv 0, b, c \neq 0, \\
\frac{d}{2c} + \frac{e}{c}, \quad \text{при} \quad a, b \equiv 0, c \neq 0, \\
\infty, \quad \text{при} \quad c \equiv 0
\end{array}
\right\}, \qquad (4.61)
\end{aligned}
$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_{31} = b_0 \sin^2\alpha, & a_{32} = b_0(\cos\alpha - \sin\alpha)^2, \\ b_{31} = -e_0 \sin\alpha, & b_{32} = e_0(\cos\alpha - \sin\alpha), \\ c_{31} = c_{32} = f_0, & d_{31} = -e_{31} = \sin\alpha(\sin\alpha\tan\alpha + \cos\alpha), \\ & d_{32} = -e_{32} = (\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\alpha\tan\alpha + \cos\alpha), \end{array} \right\}. \qquad (4.62)$$

Т.о. были рассмотрены всевозможные ситуации с имеющимися параметрами. Исходный интеграл сведен к комбинациям одномерных интегралов, некоторые из которых могут быть посчитаны численно, с помощью ЭВМ, другие могут быть доведены до аналитического результата.

$$C_0(p_1^2, p_2^2, p_1p_2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = \left\{ \begin{array}{c} a_0, d_0 \neq 0; \Rightarrow C_{01}, \\ a_0 \equiv 0, d_0 \neq 0, \Rightarrow C_{02}, \\ a_0, d_0 \equiv 0, \Rightarrow C_{03} \end{array} \right\}. \qquad (4.63)$$

5. Заключение

На основе указанной схемы вычисления были получены полные наборы возможных решений для B_0 и C_0 скалярных интегралов, представленных как в терминах элементарных функций так и с использованием специальных функций. Главным преимуществом данного представления является игнорирование (по возможности) при интегрировании выхода в комплексную плоскость переменной интегрирования. Полученные результаты находятся в хорошем согласии с результатами, полученными ранее для отдельных частных случаев [28]. Полученные результаты были опробированы при вычислении радиационных поправок к вершинным функциям взаимодействия бозонов Хиггса в рамках модели МССМ.

Список литературы

[1] G. 't Hooft and M. Veltman// Nucl. Phys. **B153** (1979), 365.

[2] G. Passarino and M. Veltman// Nucl. Phys. **B160** (1979), 151.

[3] G. J. van Oldenborgh, J. A. M. Vermaseren// Z. Phys. **C46**, (1990), 425.

[4] A.I.Davydychev, J.Math.Phys. **32**, (1991) 1052.

[5] A.I.Davydychev J.Math.Phys. **33**, (1992) 358.

[6] É. É. Boos and A. I. Davydychev, Theor. Math. Phys. **89**, (1991) 1052.

[7] A.E.Terrano, Phys.Lett. B **93**, (1980) 424.

[8] F.V.Tkachov, Phys.Lett. B **100**, (1981) 65; K.G.Chetyrkin, F.V.Tkachov, Nucl. Phys. **B192**, (1981) 159.

[9] I. G. Halliday, R. M. Ricotta, Phys.Lett. B **193**, (1987) 241; G.V.Dunne, I. G. Halliday, Phys.Lett. B **193**, (1987) 247.

[10] A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt, J. Phys. **A 31**, (1998) 8023.

[11] M.G.Schmidt, C.Schubert, Phys. Rev. **D53**, (1996) 2150.

[12] T. Gehrmann, E. Remiddi, Nucl. Phys. **B 601**, (2001) 287; Nucl. Phys. Proc. Suppl. **89**, (2000) 251. *Ibid*, preprint [hep-ph/0207020].

[13] V. A. Smirnov, Nucl.Phys. **B566**, (2000) 469; Phys.Lett. B **460**, (1999) 397.

[14] S. Laporta, E. Remiddi, Phys. Lett. B **356** (1995) 390; Phys. Lett. B **379** (1996) 283. V. W. Hughes, T. Kinoshita, Rev. Mod. Phys. **71** (1999) S133. S Laporta, E. Remiddi, Acta Phys. Pol. **B 28** (1997) 959.

[15] C. Anastasiou, E. W. N. Glover, C. Oleari, Nucl. Phys. **B 575** (2000) 416. Erratum-ibid **B 585** (2000) 763.

[16] , T.Gehrmann, E.W.N.Glover, A.Koukoutsakis, E.Remiddi, hep-ph/0206067.

[17] Z. Bern, L. Dixon, D. A. Kosower, JHEP 1 (2000) 27.

[18] K. Chetyrkin, M. Misiak, M. Münz, Nucl. Phys. **B 518** (1998) 473.

[19] E. W. N. Glover, J. B. Tausk, J. J. van der Bij, Phys. Lett. **B 516** (2001) 33.

[20] J. B. Tausk, Phys. Lett. B **469** (1999) 225.

[21] J. Fleischer, V. A. Smirnov, A. Frink, J. Körner, D.Kreimer, K. Schilcher, J. B. Tausk, Eur. Phys. J. **C2** (1998) 747.

[22] M. C. Bergére, C de Calan and A. P. C. Malbouisson, Commun. Math. Phys. **62** (1978) 137.

[23] L.G.Cabral-Rosetti, M.A.Sanchis-Lozano, hep-ph/0206081.

[24] A.Bashir, R.Delbourgo, M.L.Roberts, J.Math.Phys.**42** (2001) 5553. A.Bashir, A.Kizilersü, M.R.Pennington, Phys.Rev.**D62** (2000) 085002. A.Bashir, A.Raya, Phys.Rev.**D64** (2001) 105001.

[25] Z.Bern, gr-qc/0206071.

[26] R. P. Feynman// Phys. Rev. **76** (1949), 769.

[27] Дж. Коллинз, Перенормировка. Введение в теорию перенормировок, ренормализационной группы и операторных разложений, М., Мир, 1998.

[28] G.G. Devidze, G.R. Jibuti, hep-ph/9710283.

New results representation of algebraic reduction of B_0, C_0 scalar integrals

 Yu. P. Philippov [1]

Abstract

The complete sets of possible solutions for two, and tree-point scalar integrals are represented. The given results were obtained on the basis of in-depth study of intergrand behaviour and branching algorithm application. The $O(2)$ - rotation transformation in Feynman's parameters space was involved in reduction scenario of C_0 - function.

[1] Yuri Petrovich Philippov, Dept. of General and Theoretical Physics, Samara State University, Samara, 443011, Russia, e-mail: yuphil@front.ru