МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

НИИ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Д.В. СКОБЕЛЬЦЫНА

Ю.П. Филиппов [a]

Петлевые эффекты во взаимодействиях бозонов Хиггса в Минимальной суперсимметричной стандартной модели

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
(специальность 01.04.02 – "Теоретическая физика")

Заседание Диссертационного совета К 501.001.03,
НИИЯФ им. Скобельцына МГУ, Москва
15. 02. 2007

[a] E-mail: yuphil@ssu.samara.ru

Введение

☞ **Актуальность.** Механизм генерации масс фундаментальных частиц (МГМ) – ключевой элемент в построении современных калибровочных моделей квантовой теории поля (КТП).

➾ Он позволяет получить непротиворечивым образом массовые члены полей материи и полей промежуточных калибровочных бозонов.

➾ При реализации механизма модели сохраняют ряд важных свойств: калибровочная инвариантность и перенормируемость.

Механизм генерации масс

↙ ↘

Юкавское взаимо-вие **Механизм Хиггса**

☞ МГМ на сегодняшний день не получил прямого экспериментального подтверждения.

Одним из этапов экспериментальной проверки МГМ в рамках СМ и МССМ является экспериментальное определение констант взаимодействия бозонов Хиггса, предсказанных в рамках модели.

☞ Для решения этой проблемы необходимо:

➾ выполнить анализ сечений $\sigma = \sigma(\lambda_{HHH})$ процессов, определяемых константами, в низшем приближении;

➾ выполнить высокоточные расчеты констант взаимодействия БХ, их масс и сечений избранных процессов, сопровождающиеся учетом петлевых поправок высших порядков теории возмущений к указанным параметрам;

➾ выполнить сравнительный анализ результатов теории и экспериментов по измерению сечений избранных процессов.

☞ **Главная цель диссертационной работы** – прецизионный теоретический расчет вершинных функций (констант) трехчастичных взаимодействий бозонов Хиггса в рамках МССМ и соответствующих физических наблюдаемых – ширины распада $\Gamma(H \to hh)$ и сечений процессов $e^+e^- \to hh$, $e^+e^- \to hH$, $e^+e^- \to HH$, $e^+e^- \to AA$. Расчет реализуется в однопетлевом приближении, в рамках ФДП.

☞ Основные задачи работы:

1. Расчет всевозможных однопетлевых вкладов (допускаемых в МССМ) в одно-, двух-, трех- и четырехточечные вершинные функции (ВФ). Представление однопетлевых вкладов в аналитической форме.

2. Расчет системы контрчленов (в рамках On-shell-схемы перенормировки) для а) одноточечных ВФ бозонов Хиггса h, H, б) собственной энергии γ, W, Z – калибровочных бозонов, h, A, H – бозонов Хиггса, в) энергии смешивания $\gamma - Z$, $h - H$, $A - Z$, г) шести констант трехчастичного взаимодействия нейтральных БХ МССМ.

3. Построение алгоритмов алгебраической редукции скалярных интегралов B_0, C_0 для представления их в форме, наиболее удобной для использования процедуры перенормировки и численного расчета.

4. Расчет шести констант трехчастичного взаимодействия нейтральных БХ (λ_{hhh}, λ_{hhH}, λ_{hHH}, λ_{HHH}, λ_{hAA}, λ_{HAA}) в однопетлевом приближении с учетом $t\tilde{t}$-, $b\tilde{b}$-, $c\tilde{c}$-$\tau\tilde{\tau}$-петель в ФДП.

5. Расчет ширины распада $\Gamma(H \to hh)$ с учетом $t\tilde{t}$-, $b\tilde{b}$-, $c\tilde{c}$- $\tau\tilde{\tau}$-петель в ФДП.

6. Расчет амплитуд и полных сечений процессов $e^+e^- \to hh$, $e^+e^- \to hH$, $e^+e^- \to HH$, $e^+e^- \to AA$ в полном однопетлевом приближении в ФДП.

Задача № 1. Расчет однопетлевых вкладов в ВФ

Основные пертурбативные подходы в МССМ

$\swarrow$ $\downarrow$ $\searrow$

ренормгрупповой (РГП)

Подход эффективного потенциала (ПЭП)

Фейнмановский диаграммный подход (ФДП)

Центральный объект исследований – n–точечная вершинная функция.

ВФ в однопетлевом приближении представляется в виде:

$$\Gamma^{(n)} = \Gamma^{(n)}_{[0]} + \hat{\Gamma}^{(n)}_{[1]}, \quad \hat{\Gamma}^{(n)}_{[1]} = \sum_{i,\{j\}} T^{[1]}_{i,\{j\}} + \delta\Gamma^{(n)}_{[1]}. \tag{1}$$

Трудности:

- огромное количество петлевых вкладов, как их упорядочить при расчете?
- Как представить итоговый результат в компактной аналитической форме?
- Как минимизировать по времени численные расчеты поправок на компьютере?

Подход базисных диаграмм Фейнмана (БДФ)

1. Рассматриваемая квантовополевая модель (МССМ) характеризуется системой скалярных – $\{s_i\}$, векторных – $\{v_j\}$, фермионных – $\{f_k\}$ полей.

2. В расчете петлевых поправок к наблюдаемым по ТВ будем использовать калибровку т'Хоофта-Фейнмана ($\xi = 1$).

3. Требование выполнения релятивистской, калибровочной инвариантности и перенормируемости лагранжиана модели приводят к следующим возможным типам трех- и четырехчастичных взаимодействий (см. таблицу 1).

$s_k \bar{f}_i f_j$	$v_k \bar{f}_i f_j$	$s_k s_i s_j$	$v_k s_i s_j$	$s_k v_i v_j$	$v_k v_i v_j$	$s_k s_l s_i s_j$	$s_k s_l v_i v_j$	$v_k v_l v_i v_j$
$V^{s_k}_{f_i f_j}$	$V^{v_k,\{\mu\}}_{f_i f_j}$	$V^{s_k}_{s_i s_j}$	$V^{v_k,\{\mu\}}_{s_i s_j}$	$V^{s_k,\{\mu\nu\}}_{v_i v_j}$	$V^{v_k,\{\mu\nu\lambda\}}_{v_i v_j}$	$V^{s_k s_l}_{s_i s_j}$	$V^{s_k s_l,\{\mu\nu\}}_{v_i v_j}$	$V^{v_k v_l,\{\mu\nu\lambda\rho\}}_{v_i v_j}$
$V^{p,\{\mu\}}_{f_i f_j}$		$V^{p}_{s_i s_j}$	$V^{p,\{\mu,\nu\}}_{sv}$	$V^{p,\{\mu\nu,\lambda\}}_{v_i v_j}$		$V^{pp,\{\mu\nu\}}_{s_i s_j}$	$V^{pp,\{\mu\nu,\lambda\rho\}}_{v_i v_j}$	

Таблица 1:

$$\text{pff}: \quad V^{p\,\{\mu\}}_{f_1 f_2} = \{s^p_{f_1 f_2} + p^p_{f_1 f_2}\gamma^5, v^p_{f_1 f_2}\gamma^\mu + a^p_{f_1 f_2}\gamma^\mu\gamma^5\}, \tag{2}$$

$$\text{pss}: \quad V^{p\,\{\mu\}}_{s_1 s_2} = \{s^p_{s_1 s_2}, v^p_{s_1 s_2}(q_1 - q_2)^\mu\}, \tag{3}$$

$$\text{psv}: \quad V^{p\,\{\mu,\nu\}}_{sv} = \{v^p_{sv}(q_1 - q_2)^\mu, t^p_{sv} g^{\mu\nu}\}, \tag{4}$$

$$\text{pvv}: \quad V^{p\,\{\mu\nu,\lambda\}}_{v_1v_2} = \{t^p_{v_1v_2} g^{\mu\nu}, d^p_{v_1v_2}\left[g^{\mu\nu}(q_1-q_2)^\lambda + g^{\nu\lambda}(q_2-q_3)^\mu + g^{\lambda\mu}(q_3-q_1)^\nu\right]\}, \tag{5}$$

$$\text{ppss}: \quad V^{p_\mathrm{I}p_\mathrm{II}\,\{\mu\nu\}}_{s_1s_2} = \{s^{p_\mathrm{I}p_\mathrm{II}}_{s_1s_2}, t^{p_\mathrm{I}p_\mathrm{II}}_{s_1s_2} g^{\mu\nu}\}, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\text{ppvv}: \quad V^{p_\mathrm{I}p_\mathrm{II}\,\{\mu\nu,\lambda\rho\}}_{v_1v_2} &= \{t^{p_\mathrm{I}p_\mathrm{II}}_{v_1v_2} g^{\mu\nu}, a^{p_\mathrm{I}p_\mathrm{II}}_{v_1v_2}\left[g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda} - g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}\right] + b^{p_\mathrm{I}p_\mathrm{II}}_{v_1v_2}\left[g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}\right] + \\ &+ c^{p_\mathrm{I}p_\mathrm{II}}_{v_1v_2}\left[g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho} - g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}\right]\}.\end{aligned} \tag{7}$$

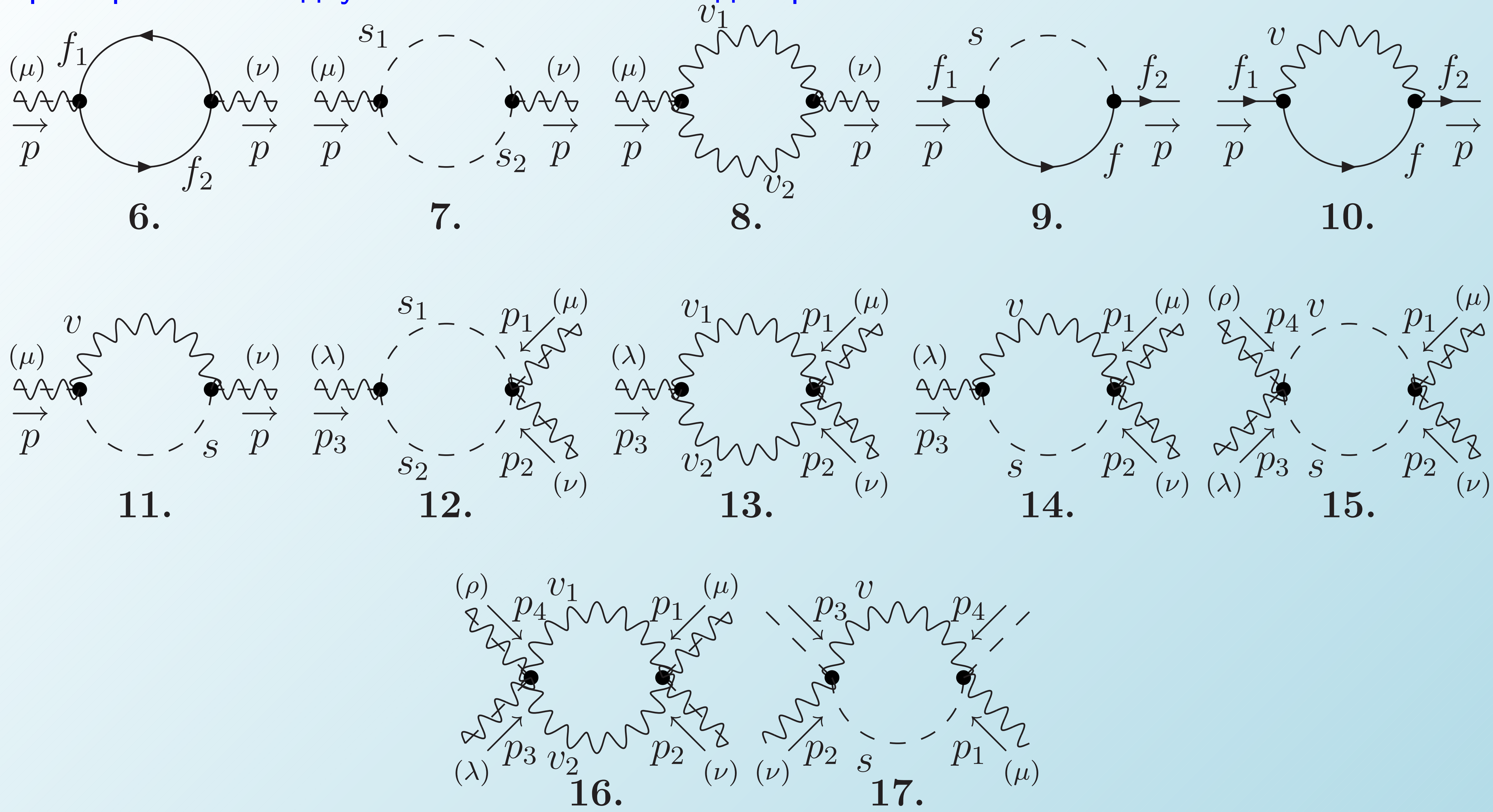
4. <u>*Критерий систематизации петлевых диаграмм по классам*</u> – количество точек (древесных вершин взаимодействия), которые определяют структуру данной диаграммы. В качестве *критерия систематизации петлевых диаграмм по видам* будем использовать набор типов полей виртуальных частиц с учетом их последовательности. Данный набор определяет обобщенную структуру – *базисную диаграмму Фейнмана* (БДФ).

5. Каждой БДФ будет сопоставлено аналитическое выражение. Последнее должно быть редуцировано с помощью стандартной техники тензорной, размерной и алгебраической редукции. Итоговый результат должен быть представлен суперпозицией дираковских матричных структур с коэффициентами, каждый из которых в свою очередь представляется линейной комбинацией минимального набора скалярных интегралов.

Основные преимущества подхода:

- В рамках настоящего подхода уже не нужно прибегать к процедурам тензорной, размерной и алгебраической редукции и, следовательно, отпадает необходимость в использовании дорогостоящего программного обеспечения для работы с символьными объектами.
- Благодаря разложению результата по минимальному набору скалярных интегралов, время вычислений значительно сокращается. Необходимо лишь один раз предварительно просчитать все имеющиеся скалярные интегралы, а затем просто подставить в ВФ.

Пример: система двухточечных базисных диаграмм Фейнмана



- Диаграммная интерпретация: БДФ № 7.

  - Исходное выражение: $$iT_{7,\{s_1 s_2\}} = N_c k \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{V^{p_1,\{\mu\}}_{s_1 s_2} V^{p_2,\{\nu\}}_{s_2 s_1}}{(q^2 - m_1^2)((q+p)^2 - m_2^2)}, \tag{8}$$

- используемые результаты: (3), A_0, B_0 , B_1, $B_{\mu\nu}$.

  - Итоговый результат: $$T_{7,\{s_1 s_2\}} = \{T^{s_\mathrm{I} s_\mathrm{II}}_{7,\{s_1 s_2\}}, T^{sv}_{7,\{s_1 s_2\}}, T^{v_\mathrm{I} v_\mathrm{II}}_{7,\{s_1 s_2\}}\}, \tag{9}$$

$$T^{s_\mathrm{I} s_\mathrm{II}}_{7,\{s_1 s_2\}} = \tfrac{1}{16\pi^2} N_c k s^{s_\mathrm{I}}_{s_1 s_2} s^{s_\mathrm{II}}_{s_2 s_1} B_0(p^2, m_1^2, m_2^2);\; T^{sv}_{7,\{s_1 s_2\}} = \left[p^\mu \mathcal{F}^{sv}_{7,\{s_1,s_2\}} + p^\nu \mathcal{G}^{sv}_{7,\{s_1,s_2\}}\right], \tag{10}$$

$$\{\mathcal{F}^{sv}_{7,\{s_1 s_2\}}, \mathcal{G}^{sv}_{7,\{s_1 s_2\}}\} = \tfrac{1}{16\pi^2} N_c k \{v^v_{s_1 s_2} s^s_{s_2 s_1}, s^s_{s_1 s_2} v^v_{s_2 s_1}\} \times [B_0 + 2B_1](p^2, m_1^2, m_2^2); \tag{11}$$

$$T^{v_\mathrm{I} v_\mathrm{II}}_{7,\{s_1 s_2\}} = g^{\mu\nu} \mathcal{F}^{T,v_\mathrm{I} v_\mathrm{II}}_{7,\{s_1 s_2\}} + \tfrac{p^\mu p^\nu}{p^2} \mathcal{F}^{L,v_\mathrm{I} v_\mathrm{II}}_{7,\{s_1 s_2\}}, \tag{12}$$

$$\mathcal{F}^{T,v_\mathrm{I} v_\mathrm{II}}_{7,\{s_1 s_2\}} = \tfrac{1}{24\pi^2} N_c k v^{v_\mathrm{I}}_{s_1 s_2} v^{v_\mathrm{II}}_{s_2 s_1} \left[A_0(m_2^2) + 2m_1^2 B_0(p^2, m_1^2, m_2^2) + (p^2 + m_1^2 - m_2^2) \times \right.$$

$$\left. \times B_1(p^2, m_1^2, m_2^2) + m_1^2 + m_2^2 - \tfrac{p^2}{3}\right], \tag{13}$$

$$\mathcal{F}^{L,v_\mathrm{I} v_\mathrm{II}}_{7,\{s_1 s_2\}} = \tfrac{1}{12\pi^2} N_c k v^{v_\mathrm{I}}_{s_1 s_2} v^{v_\mathrm{II}}_{s_2 s_1} \left[A_0(m_2^2) + (\tfrac{3}{4}p^2 - m_1^2) B_0(p^2, m_1^2, m_2^2) + \right.$$

$$\left. + (p^2 + 2m_2^2 - 2m_1^2) B_1(p^2, m_1^2, m_2^2) - \tfrac{m_1^2 + m_2^2}{2} + \tfrac{p^2}{6}\right], \tag{14}$$

здесь $m_1 = m_{s_1}, m_2 = m_{s_2}$.

Задача № 2. Расчет контрчленов к ВФ

Для определения $\delta\Gamma^{(n)}_{[1]}$ в (1) будем использовать On-shell-схему перенормировки [1].

[1] Dabelstein A. The one loop renormalization of the MSSM higgs sector and its application to the neutral scalar higgs masses// Z. Phys. 1995. C 67. P. 495-512.

Лагранжиан электрослабого и хиггсовского секторов модели:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Gauge}, \tag{15}$$

I. Система исходных свободных параметров лагранжиана (15), $\{m_1^2,\ m_2^2,\ m_{12}^2,\ v_1,\ v_2\}$, калибровочные константы $g_1,\ g_2$ заменяются на перенормированные параметры + контрчлены, поля модели претерпевают преобразования растяжения, т.е.

$$\left\{\begin{array}{lll} B_\mu \to (Z_2^B)^{1/2} B_\mu, & m_i^2 \to Z_{H_i}^{-1}(m_i^2 + \delta m_i^2), & m_{12}^2 \to Z_{H_1}^{-1/2} Z_{H_2}^{-1/2}(m_{12}^2 + \delta m_{12}^2), \\ W_\mu^\alpha \to (Z_2^W)^{1/2} W_\mu^\alpha, & g_1 \to Z_1^B (Z_2^B)^{-3/2} g_1, & g_2 \to Z_1^W (Z_2^W)^{-3/2} g_2, \\ H_i \to Z_{H_i}^{1/2} H_i, & v_i \to Z_{H_i}^{1/2}(v_i - \delta v_i), & Z_i \to 1 + \delta Z_i. \end{array}\right\} \tag{16}$$

Система замен (16) подставляется в (15), $\Rightarrow \mathcal{L} \to \mathcal{L}_R + \delta\mathcal{L}$. Выражая $\delta\mathcal{L}$ в терминах физических полей, выделяя в последнем коэффициенты при соответствующих произведениях полей, получаем результаты для контрчленов к одно-, двух- трехточечным ВФ БХ и калибровочных бозонов в терминах исходных контрчленов.

II. Структура контрчленов параметров лагранжиана (15) $\{\delta Z_{H_1}, \delta Z_{H_2}, \delta Z_1^W, \delta Z_1^B, \delta Z_2^W, \delta Z_2^B, \delta v_1, \delta v_2, \delta m_1^2, \delta m_2^2, \delta m_{12}^2\}$ определяется системой 11 условий, сформулированных в работе [1].

III. Решая систему 11 уравнений (55)–(62) с использованием формул Крамера, получаем явный вид контрчленов параметров лагранжиана (15):

$$\delta Z_{H_1} = -\Sigma'_{AA}(M_A^2) + \tfrac{1}{M_Z t_\beta}\Re e\Sigma_{AZ}(M_A^2), \quad \delta Z_{H_2} = -\Sigma'_{AA}(M_A^2) - \tfrac{t_\beta}{M_Z}\Re e\Sigma_{AZ}(M_A^2),$$

$$\delta Z_1^B = \delta Z_2^B = -\left[\tfrac{1}{M_Z^2}\Re e\Sigma_{ZZ}(M_Z^2) - \tfrac{1}{M_W^2}\Re e\Sigma_{WW}(M_W^2)\right] - \Sigma'_{\gamma\gamma}(0) + \tfrac{2s_w}{M_Z^2 c_w}\Re e\Sigma_{\gamma Z}(0),$$

$$\delta Z_1^W = \tfrac{c_w^2}{s_w^2}\left[\tfrac{1}{M_Z^2}\Re e\Sigma_{ZZ}(M_Z^2) - \tfrac{1}{M_W^2}\Re e\Sigma_{WW}(M_W^2)\right] - \Sigma'_{\gamma\gamma}(0) - \tfrac{(1+2c_w^2)}{M_Z^2 s_w c_w}\Re e\Sigma_{\gamma Z}(0),$$

$$\delta Z_2^W = \tfrac{c_w^2}{s_w^2}\left[\tfrac{1}{M_Z^2}\Re e\Sigma_{ZZ}(M_Z^2) - \tfrac{1}{M_W^2}\Re e\Sigma_{WW}(M_W^2)\right] - \Sigma'_{\gamma\gamma}(0) - \tfrac{2c_w}{M_Z^2 s_w}\Re e\Sigma_{\gamma Z}(0),$$

$$\delta v_1 = -\tfrac{v c_\beta}{2s_w^2}\left[\tfrac{c_w^2}{M_Z^2}\Re e\Sigma_{ZZ}(M_Z^2) - \tfrac{1-2s_w^2}{M_W^2}\Re e\Sigma_{WW}(M_W^2)\right] + \tfrac{v c_\beta}{2}\left[\Sigma'_{\gamma\gamma}(0) - \right.$$

$$\left. -\Sigma'_{AA}(M_A^2)\right] - \tfrac{v s_w c_\beta}{M_Z^2 c_w}\Re e\Sigma_{\gamma Z}(0) + \tfrac{v c_{2\beta}}{2M_Z s_\beta}\Re e\Sigma_{AZ}(M_A^2), \quad \delta v_2 = \tan\beta\,\delta v_1, \tag{17}$$

$$\delta m_1^2 = \tfrac{c_\beta}{2v}\left[3s_\alpha - s_{(\alpha-2\beta)}\right]T_h - \tfrac{c_\beta}{2v}\left[3c_\alpha - c_{(\alpha-2\beta)}\right]T_H + \tfrac{1}{4}\left[1 - \tfrac{s_{3\beta}}{s_\beta}\right]\Re e\Sigma_{ZZ}(M_Z^2) +$$

$$+s_\beta^2 \Re e \Sigma_{AA}(M_A^2) - \tfrac{1}{2}\left[M_A^2 - (M_Z^2 + M_A^2)c_{2\beta}\right]\Sigma'_{AA}(M_A^2) - \tfrac{M_Z}{2t_\beta}\Re e \Sigma_{AZ}(M_A^2),$$

$$\delta m_2^2 = -\tfrac{s_\beta}{2v}\left[3c_\alpha + c_{(\alpha-2\beta)}\right]T_h - \tfrac{s_\beta}{2v}\left[3s_\alpha + s_{(\alpha-2\beta)}\right]T_H - \tfrac{1}{4}\left[1 - \tfrac{s_{3\beta}}{s_\beta}\right]\Re e \Sigma_{ZZ}(M_Z^2) +$$

$$+c_\beta^2 \Re e \Sigma_{AA}(M_A^2) - \tfrac{1}{2}\left[M_A^2 + (M_Z^2 + M_A^2)c_{2\beta}\right]\Sigma'_{AA}(M_A^2) + \tfrac{M_Z t_\beta}{2}\Re e \Sigma_{AZ}(M_A^2),$$

$$\delta m_{12}^2 = \tfrac{1}{4v}\left[c_{(\alpha-3\beta)} + 3c_{(\alpha+\beta)}\right]T_h + \tfrac{1}{4v}\left[s_{(\alpha-3\beta)} + 3s_{(\alpha+\beta)}\right]T_H + \tfrac{1}{2}s_{2\beta}\Re e \Sigma_{AA}(M_A^2) -$$

$$-\frac{1}{2}M_A^2 s_{2\beta}\Sigma'_{AA}(M_A^2), \;\text{ где }\; T_h = \sum_{k,\{l\}} T^h_{k,\{l\}}, \;\; T_H = \sum_{k,\{l\}} T^H_{k,\{l\}}. \qquad (18)$$

IV. Представление контрчленов для собственных энергий, энергий смешивания, вершинных функций трехчастичного взаимодействия БХ в терминах неперенормированных собственных энергий, энергий смешивания и однопетлевых вкладов типа "головастик":

$$\delta\Gamma_{hhh} = \tfrac{3}{2}\lambda_0 \left[c_{2\alpha} s_{(\alpha+\beta)} \mathcal{F}_1 + \tfrac{1}{2}\left[-s_{(\alpha-3\beta)} + 3s_{(3\alpha-\beta)} - 7s_{(\alpha+\beta)} + s_{(3(\alpha+\beta))}\right]\mathcal{F}_2\right],$$

$$\delta\Gamma_{hhH} = \tfrac{1}{4}\lambda_0 \left[\left[c_{(\alpha-\beta)} - 3c_{(3\alpha+\beta)}\right]\mathcal{F}_1 + \left[c_{(\alpha-3\beta)} - 9c_{(3\alpha-\beta)} + 7c_{(\alpha+\beta)} - 3c_{(3(\alpha+\beta))}\right]\mathcal{F}_2\right],$$

$$\delta\Gamma_{hHH} = -\tfrac{1}{4}\lambda_0\left[\left[s_{(\alpha-\beta)} + 3s_{(3\alpha+\beta)}\right]\mathcal{F}_1 + \left[s_{(\alpha-3\beta)} + 9s_{(3\alpha-\beta)} + 7s_{(\alpha+\beta)} + 3s_{(3(\alpha+\beta))}\right]\mathcal{F}_2\right],$$

$$\delta\Gamma_{HHH} = \tfrac{3}{2}\lambda_0 \left[c_{2\alpha} c_{(\alpha+\beta)} \mathcal{F}_1 + \tfrac{1}{2}\left[c_{(\alpha-3\beta)} + 3c_{(3\alpha-\beta)} + 7c_{(\alpha+\beta)} + c_{(3(\alpha+\beta))}\right]\mathcal{F}_2\right].$$

$$\delta\Gamma_{hAA} = \tfrac{1}{2}\lambda_0\left[c_{2\beta} s_{(\alpha+\beta)} \mathcal{F}_1 + \tfrac{1}{2}\left[3s_{(\alpha-3\beta)} + s_{(\alpha+5\beta)}\right]\mathcal{F}_2\right],$$

$$\delta\Gamma_{HAA} = -\tfrac{1}{2}\lambda_0\left[c_{2\beta} c_{(\alpha+\beta)} \mathcal{F}_1 + \tfrac{1}{2}\left[3s_{(\alpha-3\beta)} + s_{(\alpha+5\beta)}\right]\mathcal{F}_2\right],$$

$$\mathcal{F}_1 = \tfrac{1}{M_Z^2 s_w^2}(-1 + 3s_w^2)\Re e\Sigma_{ZZ}(M_Z^2) + \tfrac{1}{M_W^2 s_w^2}(1 - 2s_w^2)\Re e\Sigma_{WW}(M_W^2) + \Sigma'_{\gamma\gamma}(0) -$$

$$-\tfrac{2s_w}{M_Z^2 c_w}\Re e\Sigma_{\gamma Z}(0) - 3\Sigma'_{AA}(M_A^2), \quad \mathcal{F}_2 = \tfrac{1}{M_Z s_{2\beta}}\Re e\Sigma_{AZ}(M_A^2). \qquad (19)$$

Задача № 3. Алгебраическая редукция скалярных интегралов

Тенденции в построении алгоритмов вычисления

↙ ↘

Построение обобщенных аналитических структур – результатов расчета указанных интегралов

Решение проблем численного интегрирования. Адаптация аналитических решений к машинным кодам

☞ Основное количество технических проблем в численном интегрировании обусловлено

- трудностями учета большого многообразия свойств специальных функций при написании программ, способствующих редукции итогового результата;
- Для выполнения процедуры перенормировки необходима дифференциация результата на действительную и мнимую части, что, как правило, не имеет место в представлениях результатов предшественников;
- в традиционных алгоритмах редукции интеграла нередко проводятся замены переменных, справедливые лишь при определенных значениях параметров преобразования. Выход за пределы области допустимых значений приводит к появлению сингулярных результатов, неустраняемых программой автоматически;
- непреднамеренным выходом в комплексную плоскость переменной интегрирования, когда это можно избежать, тем самым уменьшить ошибку вычислений;

Необходимо построить новое представление для интегралов B_0, C_0, удобное в применении используемой схемы перенормировки и для построения компьютерных программ расчета.

Общая схема расчета скалярных интегралов

1. ***Переход в $\mathcal{D}$ - мерное пространство***
2. ***Параметризация Фейнмана***
3. ***Поворот Вика. Интегрирование в $\mathcal{D}$ - мерном евклидовом пространстве***
4. ***Предельный переход $\mathcal{D} \to 4$. Дифференциация результата***
5. ***Редукция конечной части интеграла*** – ряд алгебраических преобразований, процедуры вычисления интегралов, сведение к набору специальных функций.

- необходимо провести детальный анализ поведения подинтегральной функции и выявить возможные варианты вычисления первообразной, соответствующие определенным областям пространства параметров скалярного интеграла;
- вычисляем первообразные в каждом возможном варианте, избегая по возможности выхода в комплексную плоскость переменной интегрирования;
- решение в каждом варианте представляется в дифференцированной форме - в виде суммы действительной и мнимой части. Итоговый результат представляется деревом всевозможных редуцированных решений.

Двухточечный скалярный интеграл B_0

$$\frac{i}{16\pi^2} B_0(p^2, m_1^2, m_2^2) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - m_1^2 + i\delta)((q+p)^2 - m_2^2 + i\delta)}. \tag{20}$$

➠ Предельный переход

$$B_0(p^2, m_1^2, m_2^2) = \lim_{\mathcal{D}\to 4} B_0^{\mathcal{D}}(p^2, m_1^2, m_2^2) = \left[\Delta_\varepsilon + \ln\mu^2 - \mathcal{I}(p^2, m_1^2, m_2^2)\right], \tag{21}$$

$$\mathcal{I}(p^2, m_1^2, m_2^2) = \int_0^1 dx \ln\left[M^2\right] = \int_0^1 dx \ln\left[ax^2 + bx + c\right], \tag{22}$$

$$a = p^2, \quad b = -(p^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad c = m_1^2. \tag{23}$$

➠ Редукция конечной части

$$\mathcal{I} = \left\{ \begin{array}{l} \text{если} \quad a \neq 0; b, c \in \Re, \quad \text{то} \quad \mathcal{I}_1 = \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{I}_{11}, (85), & \text{если} \quad \mathfrak{D} \geq 0, \\ \mathcal{I}_{12}, (87), & \text{если} \quad \mathfrak{D} < 0 \end{array} \right\}, \\ \text{если} \quad a = 0, b \neq 0, c \in \Re, \quad \text{то} \quad \mathcal{I}_2, (89), \\ \text{если} \quad a, b = 0, c \neq 0, \quad \text{то} \quad \mathcal{I}_3, (90) \end{array} \right\} \tag{24}$$

$$\mathcal{I}_{11} = \ln|a| + i\pi\theta(-a) - 2 + \sum_{i=1}^{2} \left[(1 - x_i)\ln|1 - x_i| + x_i \ln|x_i| + \right. \tag{25}$$

$$\left. + i\pi\left[\theta(x_i - 1 - \epsilon_i) + x_i\theta(x_i)\theta(1 - x_i)\right]\right], \tag{26}$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} = \frac{1}{2} + \frac{m_1^2 - m_2^2}{2p^2} \pm \frac{1}{2p^2}\sqrt{\lambda(p^2, m_1^2, m_2^2)}, \tag{27}$$

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz; \tag{28}$$

$$\mathcal{I}_{12} = \ln|a| + \left(1 + \frac{b}{2a}\right)\ln\left[1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right] - \frac{b}{2a}\ln\frac{c}{a} - 2 +$$

$$+ \frac{\sqrt{-\lambda(p^2,m_1^2,m_2^2)}}{a}\left[\operatorname{arctg}\left[\frac{b+2a}{\sqrt{-\lambda(p^2,m_1^2,m_2^2)}}\right] - \operatorname{arctg}\left[\frac{b}{\sqrt{-\lambda(p^2,m_1^2,m_2^2)}}\right]\right] + i\pi\theta(-a); \tag{29}$$

$$\mathcal{I}_2 = \int_0^1 dx \ln\left[bx + c\right] = \ln|b| + \left(1 + \frac{c}{b}\right)\ln\left|1 + \frac{c}{b}\right| - \frac{c}{b}\ln\left|\frac{c}{b}\right| - 1 +$$

$$+ i\pi\left[1 + \theta(-b) - \theta\left(1 + \frac{c}{b} + \epsilon\right) - \frac{c}{b}\theta\left(-\frac{c}{b}\right)\theta\left(1 + \frac{c}{b}\right)\right]; \tag{30}$$

$$\mathcal{I}_3 = \int_0^1 dx \ln|c| = \ln|c| + i\pi\theta(-c). \tag{31}$$

С использованием результатов решений первых трех задач решены следующие три задачи.

Задача № 4. Расчет констант взаимодействия

Расчет констант трехчастичного взаимодействия выполнен в ряде работ, например

- РГП:

[2] Haber H.E. and Hempfling R. // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. P. 1815;

[3] Haber H.E., Hempfling R., Nir Y. // Phys. Rev. D 1992. V. 46. P. 3015;

[4] Okada Y., Yamaguchi M. and Yanagida T. // Prog. Theor. Phys. 1991. V. 85. P. 1.

- ПЭП:

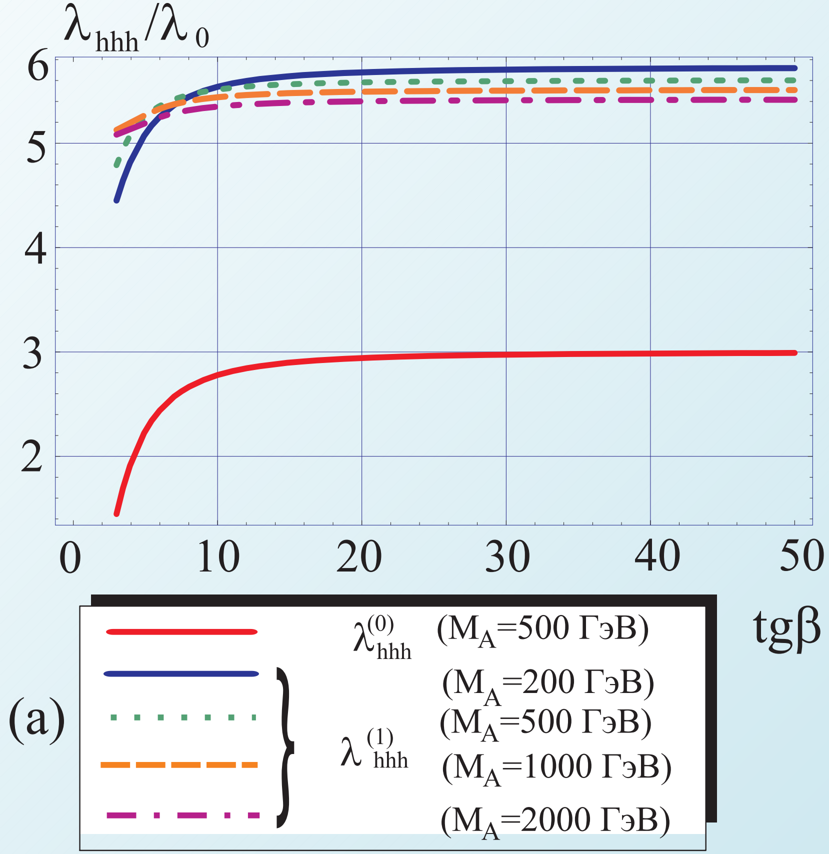
[5] Barger V., Berger M. S., Stange A. L. and Phillips R. J. N. Supersymmetric higgs boson hadroproduction and decays including radiative corrections //Phys. Rev. D 1992. V. 45. P. 4128-4147;

[6] Osland P., Pandita P. N. Measuring the trilinear couplings of MSSM neutral higgs bosons at high-energy e+ e- colliders // Phys. Rev. 1999. D V. 59. P. 055013.

- ФДП:

[7] Hollik W., Penaranda S. //Eur. Phys. J. 2002. C 23. P. 163.

[8] Brignole A., Zwirner F. // Phys. Lett. B 1993. V. 299. P. 72.



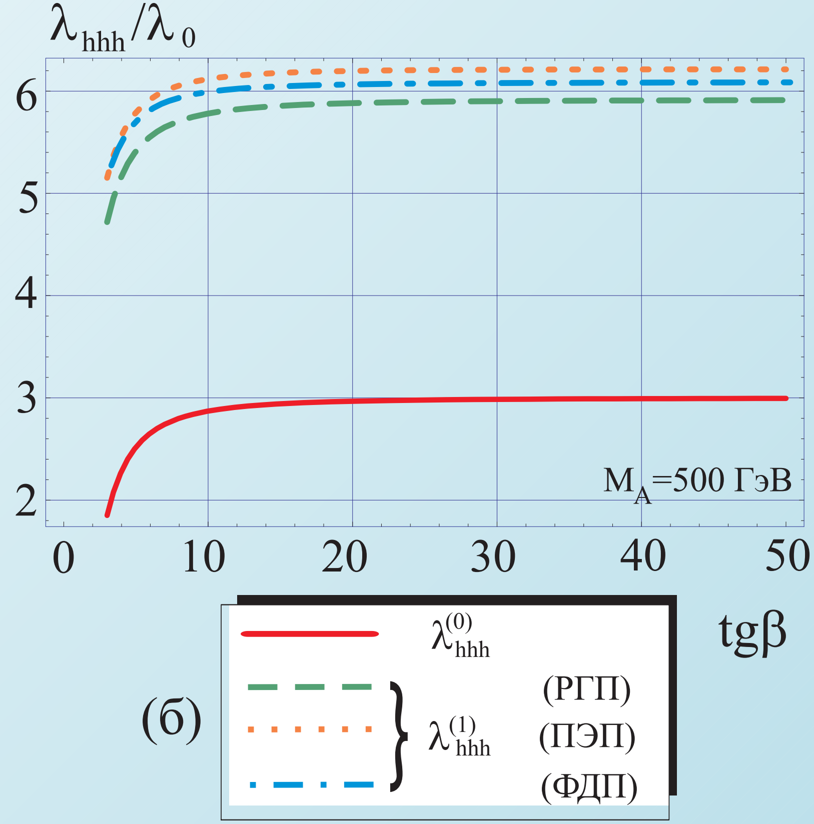


Рис. 1: *Зависимость от* $\operatorname{tg}\beta$ *константы* λ_{hhh}, *(в единицах* λ_0*) с учетом (а) юкавских однопетлевых поправок* $(t-b-\tau-c-$*петель) с использованием ФДП, (б) юкавских* $t-$*поправок в РГП и ПЭП и полном однопетлевом приближении (ФДП) при* $A_f = 1$ *ТэВ,* $\mu = 0.5$ *ТэВ,* $M_{\tilde Q} = M_{\tilde U} = M_{\tilde D} = M_{\tilde L} = M_{\tilde R} = 1$ *ТэВ.*

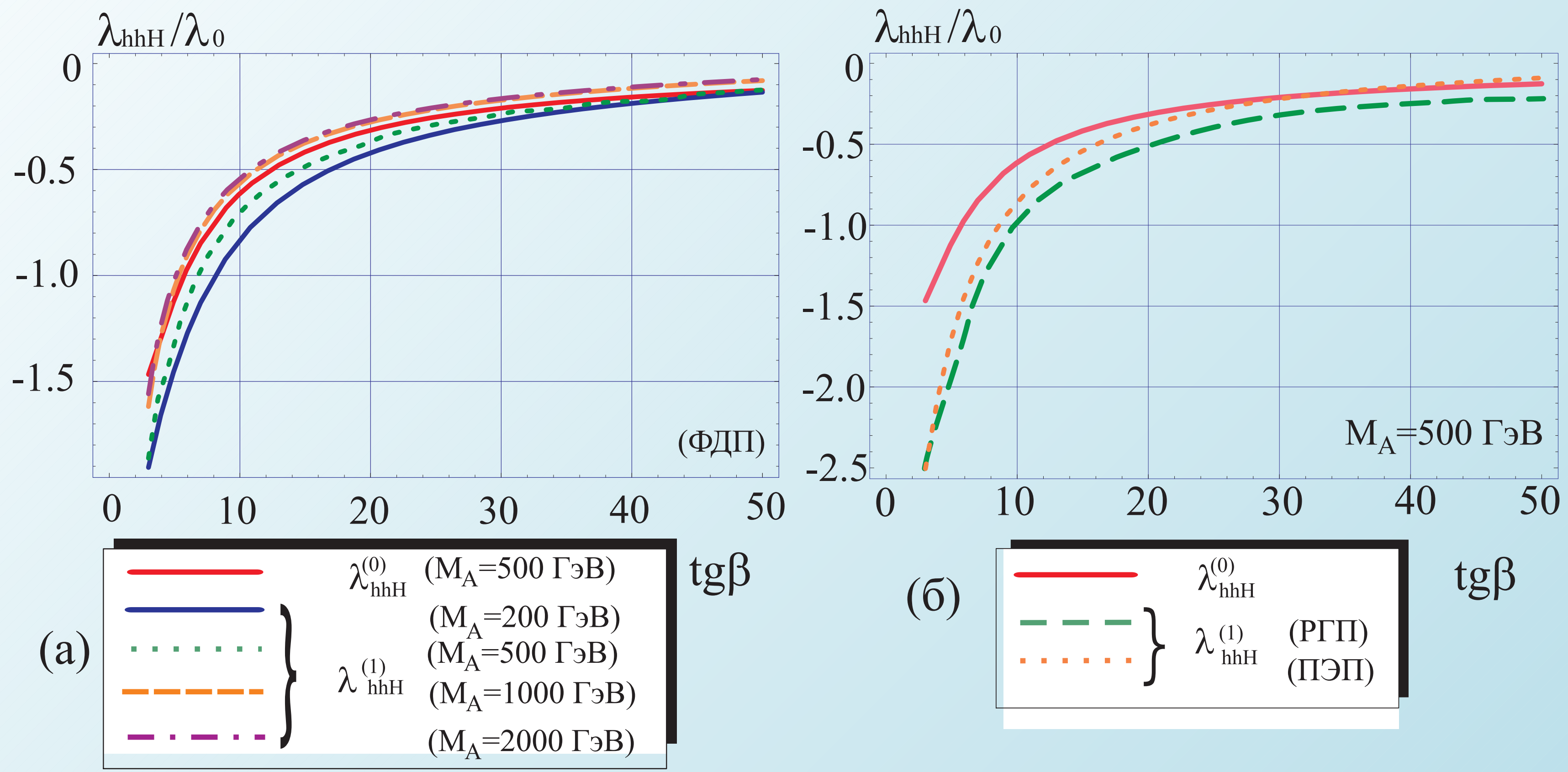


Рис. 2: *Зависимость от* $\operatorname{tg}\beta$ *константы* λ_{hhH}, *(в единицах* λ_0*) с учетом (а) юкавских однопетлевых поправок (*$t-b-c-\tau-$*петель) с использованием ФДП, (б) юкавских* $t-$*поправок в РГП и ПЭП при* $A_f = 1$ *ТэВ,* $\mu = 0.5$ *ТэВ,* $M_{\tilde{Q}} = M_{\tilde{U}} = M_{\tilde{D}} = M_{\tilde{L}} = M_{\tilde{R}} = 1$ *ТэВ.*

Задача № 5. Расчет ширины распада $H \to hh$

Ширина распада $\Gamma(H \to hh)$ была исследована как с учетом $t - \tilde{t}$ – поправок [6], с учетом $t - \tilde{t}$, $b - \tilde{b}$ – поправок [8].

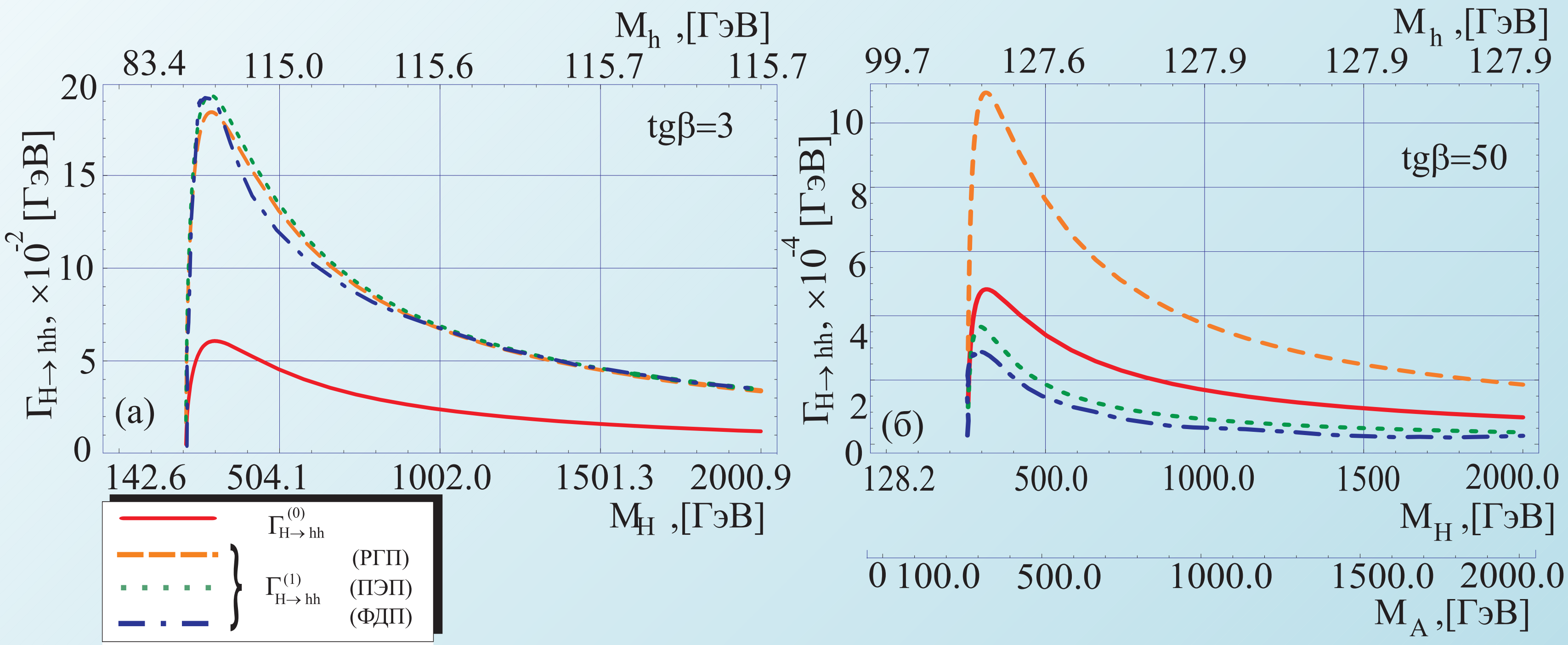


Рис. 3: *Зависимость ширины распада* $\Gamma(H \to hh)$ *от массы БХ при (а)* $\mathrm{tg}\,\beta = 3$, *(б)* $\mathrm{tg}\,\beta = 50$ *и* $A_f = 1$ *ТэВ,* $\mu = 0.5$ *ТэВ,* $M_{\tilde{Q}} = M_{\tilde{U}} = M_{\tilde{D}} = M_{\tilde{L}} = M_{\tilde{R}} = 1$ *ТэВ.*

Задача № 6. Расчет сечений рождения пары БХ

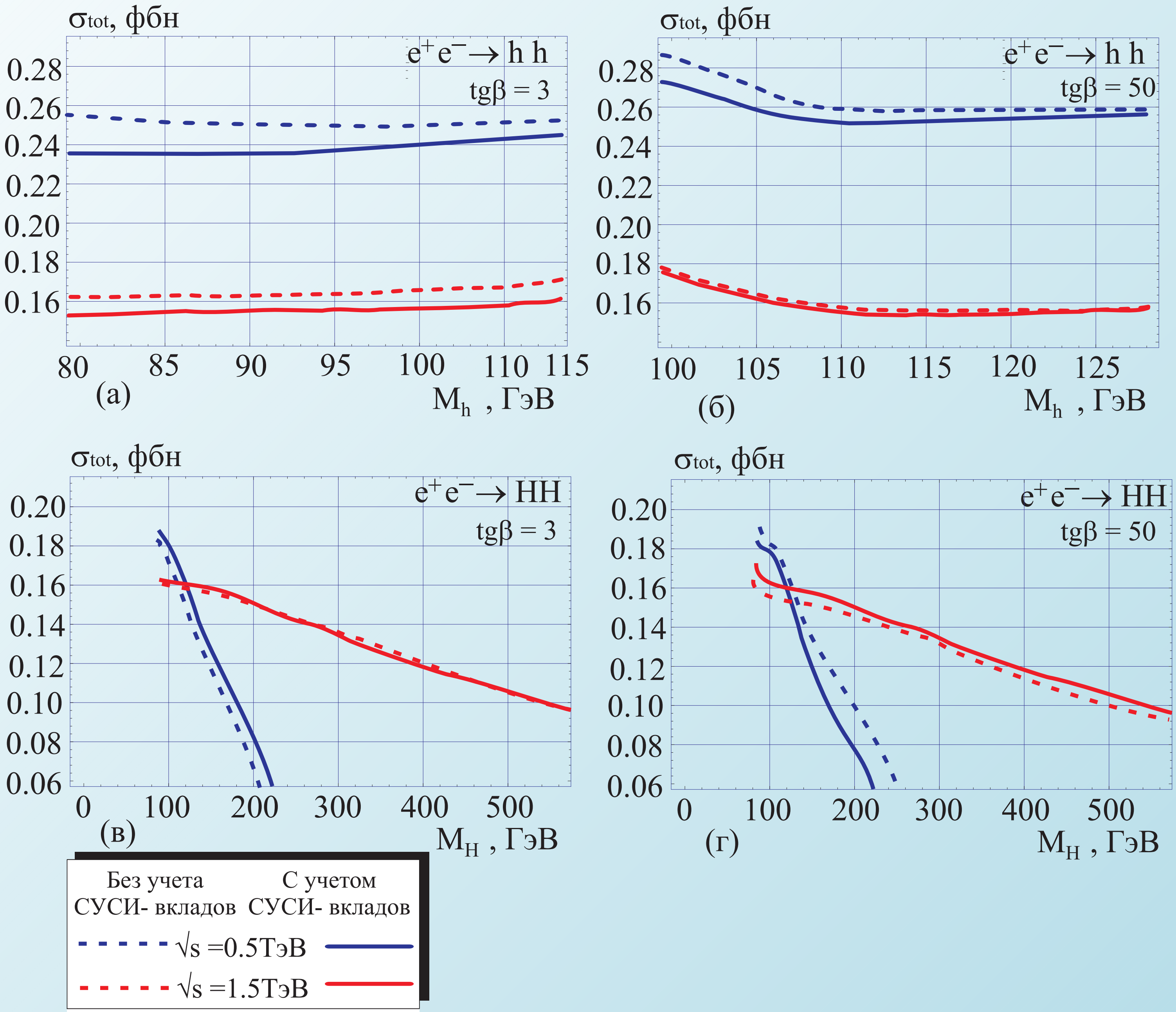
☞ Необходимость в расчете $e^+e^- \to H_iH_j(AA)$ в высших порядках ТВ диктуется необходимостью определения констант взаимодействия.

Расчет в данной работе был выполнен при следующих условиях:

- Значения m_f, M_W, M_Z, g_2 из [10] Eidelman S. et. al. Review of particle physics. Particle data group // Phys. Lett. B 2004. V. 592. P. 1.
- $M_{\tilde{Q}} = M_{\tilde{U}} = M_{\tilde{D}} = M_{\tilde{L}} = M_{\tilde{R}} = A_f = 1$ ТэВ.
- $\tan\beta \in (3,\ 50)$ и $M_A \in (90,\ 2000)$ ГэВ.
- Значение $M_2 = 250$ ГэВ, и $M_1 = \frac{5}{3}\tan^2\theta_W M_2$, $\mu = 500$ ГэВ.
- $\sqrt{s} = 0.5,\ 1.5$ ТэВ.
- Точные выражения для масс ($\tilde{f}_i$, $\tilde{\chi}_j^+$, $[i = 1,2]$, $\tilde{\chi}_k^0$, $[k = 1,\ldots,4]$).

Результат	Количество событий			
	$e^+e^- \to hh$ ($M_h = 115$ ГэВ)	$e^+e^- \to HH$ ($M_H = 120$ ГэВ)	$e^+e^- \to AA$ ($M_A = 120$ ГэВ)	$e^+e^- \to hH$ ($M_H = 190$ ГэВ)
наш	520	320	300	28
[9]	380	400	200	20

Таблица 2: количества событий для исследуемых процессов, полученных в настоящей работе и работе [9] Djouadi A., Driesen V. and Jünger C. Loop induced Higgs boson pair production at e^+e^- Colliders // Phys. Rev. D 1996. V. 54. P. 759-769. при $\sqrt{s} = 500$ ГэВ, $\mathrm{tg}\,\beta = 50$ и интегральной светимости $\int \mathcal{L} = 500\,\text{фбн}^{-1}$.


σtot, фбн
e+e−→ h h
tgβ = 3
0.28
0.26
0.24
0.22
0.20
0.18
0.16
80 85 90 95 100 110 115
(а)
Mh , ГэВ
σtot, фбн
e+e−→ h h
tgβ = 50
100 105 110 115 120 125
(б)
Mh , ГэВ
σtot, фбн
e+e−→ HH
tgβ = 3
0.20
0.18
0.16
0.14
0.12
0.10
0.08
0.06
0 100 200 300 400 500
(в)
MH , ГэВ
σtot, фбн
e+e−→ HH
tgβ = 50
(г)
MH , ГэВ
Без учета СУСИ- вкладов
С учетом СУСИ- вкладов
√s =0.5ТэВ
√s =1.5ТэВ

Резюме по задаче № 6:

- ☞ Сечение процесса $e^+e^- \to hh$ является наибольшим среди прочих. Для продольно поляризованных e^+e^- - пучков, интегральной светимости $\int \mathcal{L} \geq 500$ фбн$^{-1}$ и энергии $\sqrt{s} = 500$ ГэВ возможно производство около $5 \cdot 10^2$ таких событий. Для процессов $e^+e^- \to HH, AA$ при тех же условиях рождение составит не более $4 \cdot 10^2$ событий. И даже при массах БХ $M_{H,A} \leq 500$ ГэВ возможно накопление ≥ 200 событий.
- ☞ В силу того, что конечные состояния являются чистыми есть серьезные основания полагать, что сигналы указанных выше процессов будут детектированы. Процесс $e^+e^- \to hH$, не будет зафиксирован на эксперименте в силу малости его сечения.

Заключение

Для решения проблемы высокоточного определения констант взаимодействия нейтральных бозонов Хиггса МССМ в диссертации получены следующие результаты:

1. В рамках фейнмановского диаграммного подхода с использованием калибровки т'Хоофта-Фейнмана был развит *подход базисных диаграмм Фейнмана*. Выполнена систематизация всевозможных одно-четырехточечных однопетлевых диаграмм Фейнмана по базисным диаграммам. Данным диаграммам сопоставлены аналитические выражения, которые с использованием стандартной техники тензорной, размерной и алгебраической редукции представлены в виде суперпозиции дираковских матричных структур, где коэффициентами разложения являются линейные комбинации минимального набора стандартных скалярных интегралов.

2. Дано новое представление результатов алгебраической редукции скалярных интегралов B_0, C_0, которое является удобным для использования процедуры перенормировки и численного расчета.

3. В рамках On-shell - схемы перенормировки впервые получены аналитические выражения контрчленов для следующих объектов: а) одноточечных ВФ бозонов Хиггса h, H; б) собственных энергий γ, W, Z - калибровочных бозонов, h, A, H - бозонов Хиггса; в) энергий смешивания $\gamma - Z$, $h - H$, $A - Z$; г) шести констант трехчастичного взаимодействия нейтральных БХ МССМ. Выражения для контрчленов использованы при построении перенормированной амплитуды распада $H \to hh$.

4. В рамках ФДП впервые выполнен расчет шести констант трехчастичного взаимодействия нейтральных БХ (λ_{hhh}, λ_{hhH}, λ_{hHH}, λ_{HHH}, λ_{hAA}, λ_{HAA}) в однопетлевом приближении с учетом $t\tilde{t}$-, $b\tilde{b}$-, $c\tilde{c}$- $\tau\tilde{\tau}$-петель. Проведен сравнительный анализ новых результатов с результатами предшественников, полученных лишь с учетом $t\tilde{t}$-, $b\tilde{b}$-петель. Показано, что в определенной области пространства параметров данные поправки значительны, поэтому их учет необходим для высокоточного определения констант взаимодействия.

5. В рамках ФДП впервые выполнен расчет ширины распада $\Gamma(H \to hh)$ с учетом $t\tilde{t}$-, $b\tilde{b}$-, $c\tilde{c}$- $\tau\tilde{\tau}$-петель. Выполнен сравнительный анализ новых результатов с результатами предшественников, полученных лишь с учетом $t\tilde{t}$-, $b\tilde{b}$-петель. Показано, что при $\tan\beta \leq 10$ и массе $M_A \leq 1$ ТэВ) новые результаты в 2-2.8 раза превосходят соответствующие древесные значения. Это увеличивает вероятность детектирования сигналов соответствующих процессов и, следовательно, вероятность высокоточного определения констант взаимодействия.

6. Проведен расчет амплитуд и полных сечений процессов $e^+e^- \to hh$, $e^+e^- \to hH$, $e^+e^- \to HH$, $e^+e^- \to AA$ в полном однопетлевом приближении в рамках ФДП. Показано, что сечение процесса $e^+e^- \to hh$ достигает максимального значения среди прочих процессов. Для случая продольно поляризованных e^+e^--пучков, интегральной светимости $\int \mathcal{L} \geq 500$ фбн$^{-1}$, и энергии $\sqrt{s} = 500$ ГэВ возможно рождение около $5 \cdot 10^2$ таких событий. Для процессов $e^+e^- \to HH, AA$ рождение при тех же условиях составит не более $4 \cdot 10^2$ событий. И даже при массах БХ $M_{H,A} \leq 500$ ГэВ, возможно накопление не менее 200 таких событий. В силу того, что конечные состояния являются чистыми, есть основания полагать, что сигналы указанных выше процессов будут детектированы.

Процесс $e^+e^- \to hH$, имеет малое сечение, что существенно затрудняет детектирование искомого сигнала.

Точные результаты для сечений данных процессов позволят более точно определить сечения процессов WW–аннигиляции (альтернативного класса процессов по шкале энергии, значения сечений которых того же порядка, что и у рассмотренных процессов) на основе экспериментальных данных о количестве наблюдавшихся событий, а, следовательно, и сделать более точное предсказание значений констант взаимодействия.

Благодарю за внимание!

Подробности

Адреса сайтов на которых представлены работы соискателя

- Кафедра общей и теоретической физики СамГУ:
  http://www.ssu.samara.ru/teorphys/
- Редакция естественно-научно серии журнала «Вестник СамГУ», раздел физика:
  http://www.ssu.samara.ru/ vestnik/est/content/phys.html
- Web-сайт соискателя: http://www.yuphil.front.ru

Механизм Хиггса

[2] Goldstone J. Field theories with "superconductor"solutions // Nuovo Cimento. – 1961. – V. 19. – P. 154-164.

[3] Nambu Y., Jona-Lasinio G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. I // Phys. Rev. – 1961. – V. 122. – P. 345-358.

[4] Goldstone J., Salam A., Weinberg S. Broken symmetries // Phys. Rev. – 1962. – V. 127. – P. 965-970.

[5] Higgs P.W. Broken symmetries, massless particles and gauge fields // Phys. Lett. – 1964. – V. 12. – P. 132-133.

[6] Brout R., Englert E. Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons // Phys. Rev. Lett. – 1964. – V. 13. – P. 321-322.

[7] Higgs P.W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons // Phys. Rev. Lett. – 1964. – V. 13. – P. 508-509.

[8] Guralnik G.S., Hagen C.R., Kibble T.W.B. Global conservation laws and massless particles // Phys. Rev. Lett. – 1964. – V. 13. – P. 585-587.

[9] Higgs P.W. Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons // Phys. Rev. 1966. – V. 145. – P. 1156-1163.

[10] Kibble T.W.B. Symmetry breaking in nonabelian gauge theories // Phys. Rev. – 1967. – V. 155. – P. 1554-1561.

☞ Научная новизна результатов работы

1. В рамках фейнмановского диаграммного подхода с использованием калибровки т'Хоофта-Фейнмана сформулирован новый *подход базисных диаграмм Фейнмана* (БДФ), основанный на обобщении стандартных правил Фейнмана СМ и МССМ. Выполнена систематизация всех фейнмановских сильносвязных однопетлевых диаграмм по указанным БДФ. Результаты для однопетлевых вкладов в одно-, двух-, трех-, четырехточечные ВФ представлены в виде суперпозиции дираковских матричных структур. При этом коэффициентами разложения являются линейные комбинации минимального набора стандартных скалярных интегралов.

2. При реализации программы On-shell-перенормировки аналитически решена система 11 линеаризованных уравнений, определяемых условиями перенормировки, относительно переменных δm_1^2, δm_2^2, δm_{12}^2, δv_1, δv_2, Z_{H_1}, Z_{H_2}, Z_1^B, Z_2^B, Z_1^W, Z_2^W. Полное решение системы впервые представлено в редуцированном явном виде. Контрчлены для констант

взаимодействия, собственных энергий и энергий смешивания БХ получены в аналитической форме, в наиболее общем виде.

3. В работе дано новое представление результатов алгебраической редукции скалярных функций B_0, C_0. Предложенное представление является удобным для использования процедуры перенормировки и численного расчета.

4. В данной работе впервые построены аналитические выражения для шести констант трехчастичного взаимодействия нейтральных бозонов Хиггса МССМ и ширины распада $H \to hh$, в первом порядке теории возмущений, с учетом $t\tilde{t}$- , $b\tilde{b}$- , $c\tilde{c}$- $\tau\tilde{\tau}$-петель, в рамках ФДП.

5. Впервые построены и представлены в явном виде аналитические выражения для амплитуд и полных сечений процессов $e^+e^- \to hh$, $e^+e^- \to hH$, $e^+e^- \to HH$, $e^+e^- \to AA$ в рамках модели МССМ с учетом полного набора однопетлевых диаграмм. Проведена оценка роли петлевых вкладов суперсимметричных частиц в определении итогового результата.

☞ **Практическая значимость работы.**

Полученные результаты и подходы могут быть использованы для интерпретации результатов экспериментов по изучению природы и свойств БХ, для определения значений свободных параметров модели или области их допустимых значений. Разработанные алгоритмы и подходы весьма адаптивны к составлению компьютерных программ.

☞ **Апробация работы.** Основные результаты настоящей работы докладывались и обсуждались автором на следующих научных семинарах и конференциях:

- XVII, XVIII Международных семинарах по физике высоких энергий и квантовой теории поля (QFTHEP) (Самара-Волгоград, плавучий пансионат К. Готвальд, 2003; Санкт-Петербург, 2004);
- научной конференции секции ядерной физики ОФН РАН "Физика фундаментальных взаимодействий"(Москва, ИТЭФ, 2002, 2005);
- международном семинаре "Selected Problems of Modern Physics"(Саратов, 2003);
- шестой международной школе, посвященной вопросам физики высоких энергий ИТЭФ (Москва, ИТЭФ, 2003);
- учебно-методич. конференции "Межсессионная работа со студентами: традиционные и новые формы" (Самара, СамГУ, 2001);
- "Прикладные математические задачи в машиностроении и экономике", научно-

практической конференции посвященной памяти профессора Кудряшева Л.И. (Самара, СГАУ, СамГУ СГЭА, 2001).

- научном семинаре "Проблемы связанных состояний в квантовой теории поля" (Самара, МГУ, СамГУ, 2004);
- конференции "Концепции симметрии и фундаментальных полей в квантовой физике XXI века"(Самара, СамГУ, 2005);
- конференции "Проблемы фундаментальной физики XXI века"(Самара, СамГУ, 2005);
- второй всероссийской школе "Физика фундаментальных взаимодействий", посвященной вопросам физики высоких энергий (Протвино, фонд "Династия", 2006);
- научных конференциях преподавателей и сотрудников Самарского гос. ун-та (Самара, СамГУ, 2003-2006);
- научных семинарах кафедры общей и теоретической физики (Самара, СамГУ, 2001-2007).

По результатам исследований имеется 18 публикаций:

I. Статьи в журналах:

1. Долгополов М.В, Филиппов Ю.П. Вершинные функции взаимодействия нейтральных бозонов Хиггса h^0, H^0 в MCCM: однопетлевой анализ // ЯФ. – 2004. – Т.67. – № 3. – С. 609–613.

2. Филиппов Ю.П. Юкавские радиационные поправки к каплингам трехчастичного взаимодействия нейтральных CP-четных бозонов Хиггса и ширине распада $H \to hh$ в МССМ // ЯФ. – 2007. – Т. 70 – № 6. Принята в печать; Philippov Yu. Yukawa radiative corrections to the trilinear self-couplings of neutral CP-even Higgs bosons and decay width $\Gamma(H \to hh)$ in the MSSM / Yu. Philippov // eprint: hep-ph/0611260. 12p.

3. Долгополов М.В., Дубинин М.Н., Смирнов И.А., Филиппов Ю.П. Суперсимметричная модель с нарушением CP-инвариантности. 2 Парное рождение нейтральных бозонов Хиггса на LHC // Вестн. Самарск. гос. ун-та. Спец. выпуск. – 2003. – С. 131–148.

4. Dolgopolov M.V., Philippov Yu.P. The trilinear neutral Higgs self-couplings in the MSSM. Complete one-loop analysis // Вестн. Самарск. гос. ун-та. 2-й спец. выпуск. – 2003. – С. 87–95; eprint: hep-ph/0310263. 6p.

5. Филиппов Ю.П. Исследование трехчастичного взаимодействия нейтральных бозонов Хиггса МССМ с учетом юкавских однопетлевых поправок // Вестн. Самарск. гос. ун-та. – 2006. – № 3(43). – С. 167–178.

6. Филиппов Ю.П. Вершинные функции самодействия CP-четных нейтральных бозонов Хиггса (h^0, H^0) в модели МССМ: однопетлевой анализ // Аспирант. вестн. Поволжья. – 2002. – № 2. – С. 64–66.

7. Филиппов Ю.П. Метод ветвления в вычислении скалярных N - точечных интегралов // Теор. физика. – 2004. – № 5. – С. 66–80.

8. Филиппов, Ю.П. Новое представление результатов алгебраической редукции B_0, C_0 скалярных интегралов // Теор. физика. – 2005. – № 6. – С. 86–97.

9. Филиппов, Ю.П. Ширина распада $H \to hh$ в МССМ с учетом юкавских радиационных поправок // Теор. физика. – 2006. – № 7. Принята в печать.

II. В трудах международных и всероссийских конференций:

1. Dolgopolov M.V., Philippov Yu.P. The trilinear neutral Higgs self-couplings in the MSSM. Complete one-loop analysis // Proceedings of the XVII International Workshop QFTHEP'2003. – MSU, SINP. – P. 170–175.

2. Philippov Yu.P. The decay $H \to hh$ in the MSSM. Complete one-loop analysis // Proceedings of the XVIII International Workshop QFTHEP'2004. – MSU, SINP. – P. 172–177.

3. Филиппов, Ю.П. Однопетлевые фермионные и сфермионные вклады в двух-, трех- и четырехточечные функции Грина // V научная конференция молодых ученых и специалистов ОИЯИ: тез. докл. Дубна: ОИЯИ, 2001. – С.144–146.

4. Филиппов Ю.П. Вершинные функции трехчастичного взаимодействия нейтральных бозонов Хигга в модели МССМ: однопетлевой анализ // VII научная конференция молодых ученых и специалистов ОИЯИ: тез. докл. Дубна: ОИЯИ, 2003. – С.191–194.

5. Бачурина А.В., Долгополов М.В., Ивушкин А.Н., Филиппов Ю.П. Квантовые поправки к массам калибровочных бозонов и оценка на массу хиггсовского бозона // Науч.-практич. конф., посвящ. памяти проф. Л.И. Кудряшева: сб. докл., ч. 1. Самара: Изд-во СГАУ, СамГУ, СГЭА, 2001. – С. 15–17.

6. Долгополов В.М., Долгополов М.В., Филиппов Ю.П. Однопетлевые интегралы для фермионных вкладов // Науч.-практич. конф., посвящ. памяти проф. Л.И. Кудряшева: сб. докл., ч. 1. Самара: Изд-во СГАУ, СамГУ, СГЭА, 2001. – С.17–18.

7. Долгополов М.В., Филиппов Ю.П. Развитие стандартной модели // Вестник учеб.-методич. совета СамГУ, тез. докл. - Самара: "Самарский университет", 2001.- С.7-10.

8. Филиппов Ю.П. Новое представление результатов алгебраической редукции однопетлевых скалярных

интегралов // Науч. конф. "Концепции симметрии и фундаментальных полей в квантовой физике XXI века": тез. докл. Самара: Изд-во "Универс-групп", 2005. – С. 73–75.

9. Филиппов Ю.П. Перспективы экспериментального исследования каплингов трехчастичного взаимодействия нейтральных бозонов Хиггса МССМ на будущих коллайдерах // Науч. конф. "Проблемы фундаментальной физики XXI века": тез. докл. Самара: Изд-во "Универс-групп", 2005. – С. 94–95.

☞ Исследования были поддержаны

- грантами 02-02-26561-зм, 03-02-26501-зм российского фонда фундаментальных исследований;
- грантом 298E2.4 K Самарского областного конкурса грантов 2006 года;
- стипендиальной программой ("молодой ученый без степени") фонда "Династия".

☞ Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, заключения, списка литературы (170 наименований), приложений. Работа содержит 34 рисунка и 5 таблиц. Общий объем диссертации - 163 страницы машинописного текста.

2. Хиггсовский сектор МССМ

Хиггсовский сектор МССМ представлен дублетами скалярных полей H_1 и H_2.

$$\mathcal{L}_{\rm Higgs} = \mathcal{L}_{\rm kin}^{\rm Higgs} - V_{\rm Higgs} \tag{32}$$

$$\mathcal{L}_{kin}^{Higgs} = \left[D_\mu H_1\right]^\dagger D^\mu H_1 + \left[D_\mu H_2\right]^\dagger D^\mu H_2, \text{ где } D^\mu = \partial^\mu - \tfrac{i}{2} g_1 B^\mu - \tfrac{i}{2} g_2 \sigma^i W^{\mu i}, \tag{33}$$

$$V_{\rm Higgs} = m_1^2\,|H_1|^2 + m_2^2\,|H_2|^2 - m_{12}^2\,\left(\epsilon_{ij}\,H_1^i\,H_2^j + \text{h.c.}\right) +$$
$$+\tfrac{1}{8}(g_1^2 + g_2^2)\,\left(|H_1|^2 - |H_2|^2\right)^2 + \tfrac{1}{2}\,g_2^2\,|H_1^\dagger\,H_2|^2, \tag{34}$$

σ^i – матрицы Паули; m_1^2, m_2^2, m_{12}^2 – параметры мягкого нарушения суперсимметрии; $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$, $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$.

$$H_1 = \begin{bmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + \phi_1^0 + i\chi_1^0) \\ \phi_1^- \end{bmatrix}, \; H_2 = \begin{bmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_2^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v_2 + \phi_2^0 + i\chi_2^0) \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Представление потенциала Хиггса в терминах физических полей:

$$\begin{bmatrix} \phi_1^0 \\ \phi_2^0 \end{bmatrix} = D(\alpha) \begin{bmatrix} H \\ h \end{bmatrix}, \; \begin{bmatrix} \chi_1^0 \\ \chi_2^0 \end{bmatrix} = D(\beta) \begin{bmatrix} G \\ A \end{bmatrix}, \; \begin{bmatrix} \phi_1^\pm \\ \phi_2^\pm \end{bmatrix} = D(\beta) \begin{bmatrix} G^\pm \\ H^\pm \end{bmatrix}, \tag{36}$$

Спектр полей Хиггса:

- нейтральные CP - четные поля (h, H);
- нейтральное CP - нечетное поле (A);
- два заряженных поля $(H^{\pm})$;
- нефизические голдстоуновские степени свободы G, $G^{\pm}$.

После процедуры диагонализации потенциал Хиггса (34) характеризуется лишь двумя свободными параметрами:

$$M_A^2 = -m_{12}^2(tg\beta + ctg\beta), \quad tg\beta = \frac{v_2}{v_1}. \tag{37}$$

$$\tan 2\alpha = \tan 2\beta \frac{M_A^2 + M_Z^2}{M_A^2 - M_Z^2}, \qquad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0. \tag{38}$$

В терминах физических полей лагранжиан взаимодействия полей Хиггса представляется в виде:

$$V_{\text{Higgs}}^{Int} = \frac{\lambda_{hhh}^{(0)}}{3!} hhh + \frac{\lambda_{hhH}^{(0)}}{2!} hhH + \frac{\lambda_{hHH}^{(0)}}{2!} hHH + \frac{\lambda_{HHH}^{(0)}}{3!} HHH + \frac{\lambda_{hAA}^{(0)}}{2!} hAA + \\ + \frac{\lambda_{HAA}^{(0)}}{2!} HAA + \lambda_{hH^+H^-}^{(0)} hH^+H^- + \lambda_{HH^+H^-}^{(0)} HH^+H^- \tag{39}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda^{(0)}_{hhh} = 3\lambda_0 c_{2\alpha} s_{(\alpha+\beta)}, & \lambda^{(0)}_{hhH} = \lambda_0 [2 s_{(2\alpha)} s_{(\alpha+\beta)} - c_{2\alpha} c_{(\alpha+\beta)}], \\ \lambda^{(0)}_{HHH} = 3\lambda_0 c_{2\alpha} c_{(\alpha+\beta)}, & \lambda^{(0)}_{hHH} = -\lambda_0 [2 s_{2\alpha} c_{(\alpha+\beta)} + c_{2\alpha} s_{(\alpha+\beta)}], \\ \lambda^{(0)}_{hAA} = \lambda_0 c_{2\beta} s_{(\alpha+\beta)}, & \lambda^{(0)}_{hH^+H^-} = g_2 M_W s_{(\beta-\alpha)} + \lambda_0 c_{2\beta} s_{(\alpha+\beta)}, \\ \lambda^{(0)}_{HAA} = -\lambda_0 c_{2\beta} c_{(\alpha+\beta)}, & \lambda^{(0)}_{HH^+H^-} = g_2 M_W c_{(\beta-\alpha)} - \lambda_0 c_{2\beta} c_{(\alpha+\beta)}, \end{array}\right\} \quad (40)$$

здесь и далее $\lambda_0 = \frac{M_z^2}{v}$, $s_x = \sin x$, $c_x = \cos x$.

Массы БХ в древесном приближении:

$$m_{h,H}{}^2 = \frac{1}{2}\left[M_A^2 + M_Z^2 \mp \sqrt{(M_A^2 + M_Z^2)^2 - 4 M_Z^2 M_A^2 c_{2\beta}} \right], \; m^2_{H^\pm} = M_A^2 + M_W^2. \quad (41)$$

3. Элементарные процессы определения констант БХ

$\mathbf{e^+e^-}$ – линейные коллайдеры	LHC
(1) $e^+e^- \to Z + H_iH_j\{AA\}, \quad i,j=1,2$	(1) $q\,\bar{q} \to W/Z + H_iH_j\{AA\}, \; i,j=1,2$
(2) $e^+e^- \to \nu_e\bar{\nu}_e + H_iH_j\{AA\}, \; i,j=1,2$	(2) $q\,q' \to q\,q' + H_iH_j\{AA\}, \; i,j=1,2$
(3) $e^+e^- \to A + H_iH_j\{AA\}, \; i,j=1,2$	(3) $q\,\bar{q} \to A + H_iH_j\{AA\}, \; i,j=1,2$
(4) $e^+e^- \to H_iH_j\{AA\}, \; i,j=1,2$	(4) $g\,g \to H_iH_j\{AA\}, \; i,j=1,2$

Основные особенности процессов

- В МССМ допускается производство тяжелого БХ, сопровождающееся $H \to hh$. Согласно [4] данный распад увеличивает полное сечение процесса парного рождения $h-$бозона на линейном коллайдере на порядок и на 2 порядка [5] в случае процесса глюонной аннигиляции!

  4] Djouadi A., Haber H. E., Zerwas P. M. Multiple production of MSSM neutral higgs bosons at high-energy e^+e^- colliders // Phys. Lett. B. – 1996. – V. 375. – P. 203-212.

  [5] Djouadi A., Kalinowski J. and Zerwas P.M. Exploring the SUSY Higgs sector at e^+e^- linear colliders: A Synopsis // Z. Phys. – 1993. – C 57. – P. 569-584.

- При энергиях $\sqrt{s} \leq 1$ ТэВ, наиболее перспективными являются процессы

$e^+e^- \to Z + H_iH_j\{AA\}$, а при $\sqrt{s} \geq 1$ ТэВ $e^+e^- \to \nu_e\bar{\nu}_e + H_iH_j\{AA\}$.

- В отдельных областях пространства параметров МССМ значения сечений одного порядка с СМ-аналогом.
- В работах [4], [6] было показано, что наибольшей чувствительностью к определению обладают константы λ_{hhh}, λ_{hhH}.

[6] Djouadi A., Kilian W., Mühlleitner M. and Zerwas P.M. Production of neutral higgs boson pairs at LHC // Eur. Phys. J. – 1999. – C 10. – P. 45-49.

- Сечения процессов $e^+e^- \to H_iH_j\{AA\}$ экстремально малые – $\sim 10^{-6} - 10^{-8}$ фбн.
- На LHC доминирующим процессом является $gg \to H_iH_j(AA)$. Наибольший шанс определения у константы λ_{hhH}. Главная трудность – большой адронный фон.

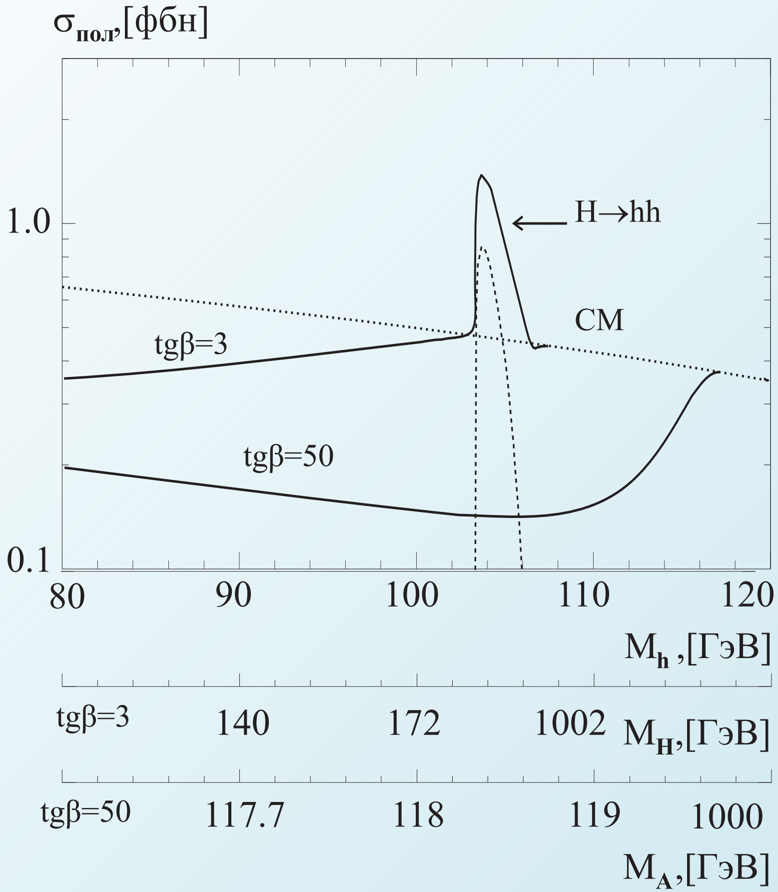


Рис. 4: Сечение процесса $e^+e^- \to Zhh$ при $\tan\beta = 3$, 50, $\sqrt{s} = 500$ ГэВ, $A = 1$ ТэВ, $\mu = \pm 1$ ТэВ. Точечная кривая характеризует поведение сечения в СМ. Пунктирная кривая определяет вклад резонансного рамспада $H \to hh$.

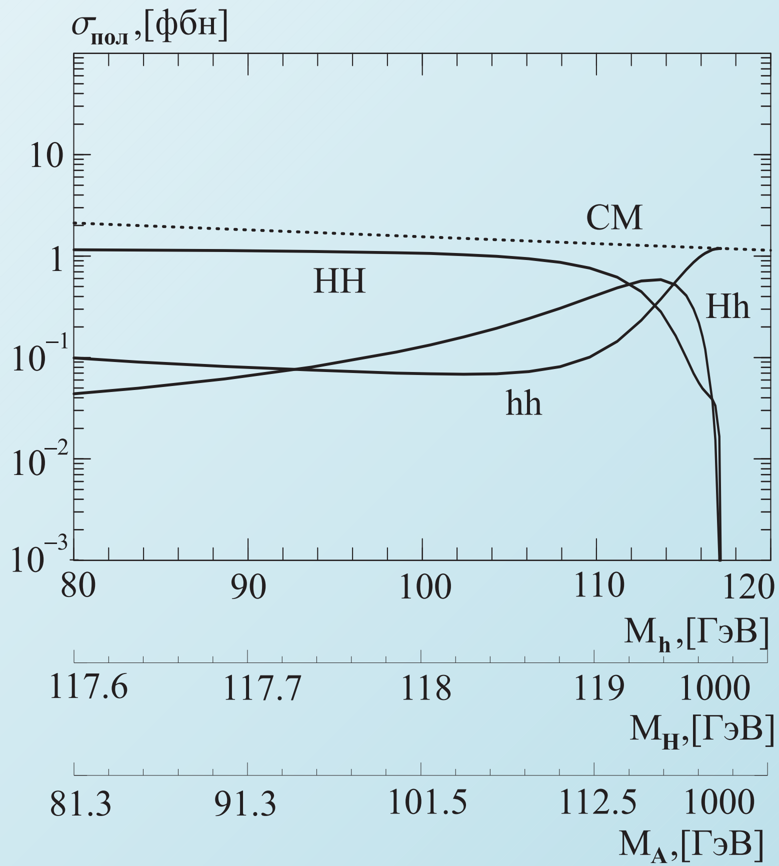


Рис. 5: Сечение процессов $e^+e^- \to \bar{\nu}_e \nu_e H_i H_j$ для $\sqrt{s} = 1.6$ ТэВ, $\tan\beta = 50$, $A = 1$ ТэВ, $\mu = 1$ ТэВ.

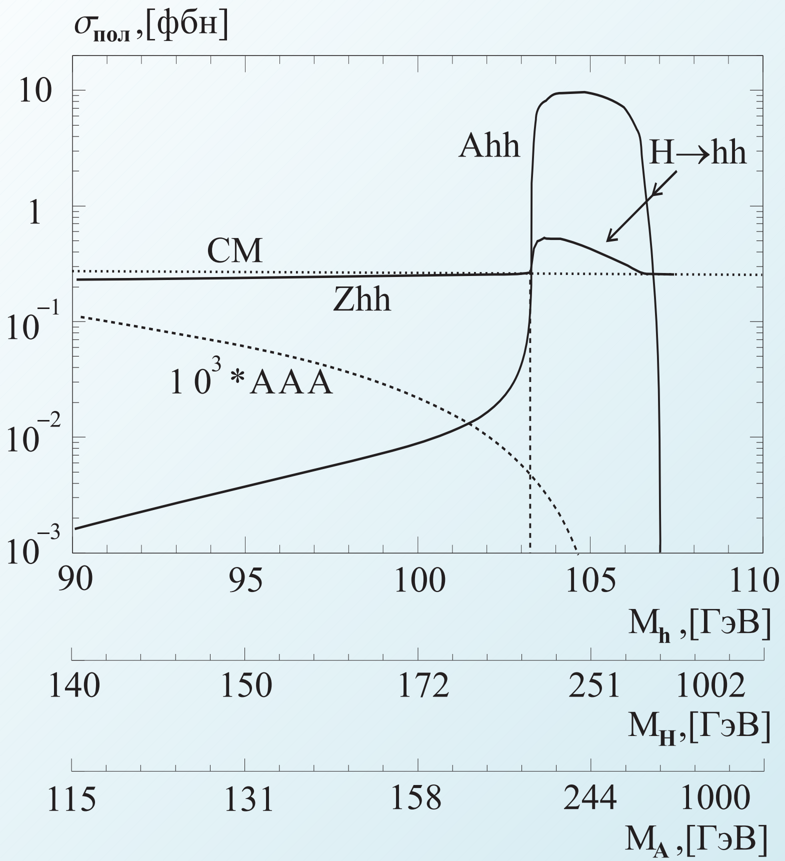


Рис. 6: *Сечения процессов парного и трехчастичного рождения БХ с конечными состояниями Zhh, Ahh и AAA для* $\mathrm{tg}\,\beta = 3$, $\sqrt{s} = 1$ *ТэВ*, $A = 1$ *ТэВ*, $\mu = -1$ *ТэВ*.

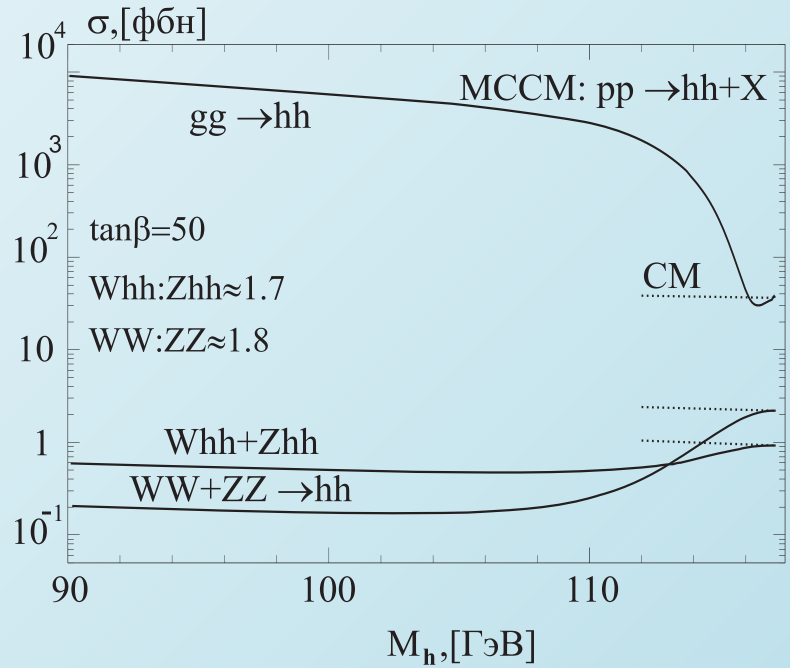


Рис. 7: *Сечения процессов рождения пары легчайших БХ при* $\mathrm{tg}\,\beta = 50$, $\sqrt{s} = 1$ *ТэВ*, $A = 1$ *ТэВ*, $\mu = 1$ *ТэВ*.

Процессы трехчастичного рождения БХ являются единственным источником информации о константах четырехчастичного взаимодействия БХ. Их сечения малы за исключением сценария с резонансным распадом H - бозона.

4. Формализм однопетлевых мультидиаграммных вычислений

Основные пертурбативные подходы в МССМ

$\swarrow$ $\downarrow$ $\searrow$

ренормгрупповой (РГП)

[16] Barbieri R., Frigeni M. and Caravaglios M. // Phys. Lett. B 1991. V. 258. P. 167;

[17] Okada Y., Yamaguchi M. and Yanagida T. // Phys. Lett. B 1991. V. 262. P. 54;

[18] Espinosa J.R. and Quirós M. // Phys. Lett. B 1991. V. 266 P. 389.

Подход эффективного потенциала (ПЭП)

[19] Barbieri R. and Frigeni M. // Phys. Lett. B 1991. V. 258. P. 395;

[20] Ellis J., Ridolfi G. and Zwirner F. // Phys. Lett. B 1991. V. 262. P. 477;

[21] Brignole A., Ellis J., Ridolfi G. and Zwirner F. // Phys. Lett. B 1991. V. 271. P. 123. and (E) B 1991. V. 273. P. 550.

Фейнмановский диаграммный подход (ФДП)

[22] Yamada A. // Phys. Lett. B 1991. V. 263. P. 233;

[23] Chankowski P.H., Pokorski S. and Rosiek J. // Phys. Lett. B 1992. V. 274. P. 191;

[24] Brignole A. // Phys. Lett. B 1992. V. 277. P. 313.

5.1. On-shell - схема перенормировки

$$\mathcal{L}_{Gauge} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^i_{\mu\nu}W^{\mu\nu\, i}, \tag{42}$$

$$\text{где } F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \;\; W^i_{\mu\nu} = \partial_\mu W^i_\nu - \partial_\nu W^i_\mu + g_2 \varepsilon^{ijk} W^j_\mu W^k_\nu. \tag{43}$$

а) для контрчленов к одноточечным ВФ БХ h, H:

$$\delta\Gamma^{[\mathrm{I}]}_i = a^{[1]}_i \delta Z_{H_1} + a^{[2]}_i \delta Z_{H_2} + a^{[3]}_i \delta Z_G + b^{[1]}_i \delta v_1 + b^{[2]}_i \delta v_2 + c^{[1]}_i \delta m_1^2 +$$

$$+c^{[2]}_i \delta m_2^2 + c^{[3]}_i \delta m_{12}^2, \qquad i = h,\, H, \tag{44}$$

$$\delta Z_G = \left[2(c_w^2 \delta Z_1^W + s_w^2 \delta Z_1^B) - 3(c_w^2 \delta Z_2^W + s_w^2 \delta Z_2^B)\right]; \tag{45}$$

б) для контрчленов к двухточечным ВФ БХ и калибровочных бозонов:

$$\delta\Gamma^{[\mathrm{I}]}_{ij} = a^{[1]}_{ij} \delta Z_{H_1} + a^{[2]}_{ij} \delta Z_{H_2} + a^{[3]}_{ij} \delta Z_G + b^{[1]}_{ij} \delta v_1 + b^{[2]}_{ij} \delta v_2 + c^{[1]}_{ij} \delta m_1^2 +$$

$$+c^{[2]}_{ij} \delta m_2^2 + c^{[3]}_{ij} \delta m_{12}^2, \;\; i, j = Z, A, h, H, \tag{46}$$

$$\delta\Gamma^{[\mathrm{I}]}_{\gamma\gamma} = 0, \tag{47}$$

$$\delta\Gamma^{[\mathrm{I}]}_{WW} = M_W^2 \left[c_\beta^2 \delta Z_{H_1} + s_\beta^2 \delta Z_{H_2} + 2\delta Z_1^W - 3\delta Z_2^W - \frac{2}{v}\left[c_\beta \delta v_1 + s_\beta \delta v_2\right]\right], \tag{48}$$

$$\delta\Gamma^{[\mathrm{I}]}_{\gamma Z} = M_Z^2 c_w s_w \left[\delta Z_1^W - \delta Z_1^B - \delta Z_2^W + \delta Z_2^B\right], \tag{49}$$

$$\delta\Gamma^{[\mathrm{I}]}_{AZ} = M_Z\left[-\tfrac{1}{2}s_{2\beta}\left[\delta Z_{H_1} - \delta Z_{H_2}\right] + \tfrac{1}{v}\left[s_\beta \delta v_1 - c_\beta \delta v_2\right]\right], \tag{50}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\Delta_{ZZ}(p^2) = (p^2 - M_Z^2)\left[c_w^2 \delta Z_2^W + s_w^2 \delta Z_2^B\right], \; \Delta_{WW}(p^2) = (p^2 - M_W^2)\delta Z_2^W, \\
\Delta_{\gamma\gamma}(p^2) = p^2\left[s_w^2 \delta Z_2^W + c_w^2 \delta Z_2^B\right], \;\; \Delta_{\gamma Z}(p^2) = p^2 s_w c_w \left[\delta Z_2^B - \delta Z_2^W\right], \\
\Delta_{AA}(p^2) = p^2\left[s_\beta^2 \delta Z_{H_1} + c_\beta^2 \delta Z_{H_2}\right], \;\; \Delta_{hh}(p^2) = p^2\left[s_\alpha^2 \delta Z_{H_1} + c_\alpha^2 \delta Z_{H_2}\right], \\
\Delta_{hH}(p^2) = \tfrac{1}{2}s_{2\alpha}p^2\left[\delta Z_{H_2} - \delta Z_{H_1}\right], \;\; \Delta_{HH}(p^2) = p^2\left[c_\alpha^2 \delta Z_{H_1} + s_\alpha^2 \delta Z_{H_2}\right],
\end{array}\right\} \tag{51}$$

$$\hat{\Sigma}_{ii} = \Sigma_{ii}(p^2) + \Delta_{ii}(p^2) - \delta\Gamma^{[I]}_{ii}, \;\; \Sigma_{ii}(p^2) = \sum_{k,\{l\}} T^{ii}_{k,\{l\}}, \tag{52}$$

$$\hat{\Sigma}_{ij} = \Sigma_{ij}(p^2) + \Delta_{ij}(p^2) + \delta\Gamma^{[I]}_{ij}, \;\; \Sigma_{ij}(p^2) = \sum_{k,\{l\}} T^{ij}_{k,\{l\}}. \tag{53}$$

в) для контрчленов к трехточечным ВФ БХ:

$$\delta\Gamma^{[\mathrm{I}]}_{ijk} = a^{[1]}_{ijk}\delta Z_{H_1} + a^{[2]}_{ijk}\delta Z_{H_2} + a^{[3]}_{ijk}\delta Z_G + b^{[1]}_{ijk}\delta v_1 + b^{[2]}_{ijk}\delta v_2, \qquad i, j, k = h,\ H,\ A \tag{54}$$

II. Структура контрчленов параметров лагранжиана (15) $\{\delta Z_{H_1}, \delta Z_{H_2}, \delta Z_1^W, \delta Z_1^B, \delta Z_2^W, \delta Z_2^B, \delta v_1, \delta v_2, \delta m_1^2, \delta m_2^2, \delta m_{12}^2\}$ определяется системой 11 условий, сформулированных в работе [1].

1,2. On-shell-условия для физических масс W-,Z-бозонов:

$$\Re e\hat{\Sigma}_{ZZ}(M_Z^2) = 0, \quad \Re e\hat{\Sigma}_{WW}(M_W^2) = 0. \tag{55}$$

3. On-shell-условие для вычета от фотонного пропагатора:

$$\frac{\partial}{\partial p^2}\hat{\Sigma}_{\gamma\gamma}(p^2)\bigg|_{p^2=0} = 0. \tag{56}$$

4. On-shell-условие для $\gamma Z-$смешивания:

$$\Re e\hat{\Sigma}_{\gamma Z}(0) = 0. \tag{57}$$

5,6. On-shell-условия для физической массы A - бозона и вычета от его пропагатора:

$$\Re e\,\hat{\Sigma}_{AA}(M_A^2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial p^2}\hat{\Sigma}_{AA}(p^2)\bigg|_{p^2=M_A^2} = 0. \tag{58}$$

7. Сохранение $U_{EM}(1)-$калибровочной симметрии и, как следствие, выполнение тождества Уорда приводит к равенству вида:

$$\delta Z_1^B = \delta Z_2^B. \tag{59}$$

8. Требование выполнения соотношения $\tan\beta = v_2/v_1$ на однопетлевом уровне приводит к условию:

$$\frac{\delta v_1}{v_1} = \frac{\delta v_2}{v_2}. \tag{60}$$

9,10. Условия нулевого вклада от диаграмм типа "головастик": сумма всех вкладов от диаграмм типа "головастик", включая и контрчленные вклады для рассматриваемого поля, должна равняться нулю, т.е.

$$\Delta\hat{\Gamma}_h^{[\mathrm{I}]} = \sum_{k,\{l\}} T^h_{k,\{l\}} + \delta\Gamma_h^{[\mathrm{I}]} = 0, \quad \Delta\hat{\Gamma}_H^{[\mathrm{I}]} = \sum_{k,\{l\}} T^H_{k,\{l\}} + \delta\Gamma_H^{[\mathrm{I}]} = 0. \tag{61}$$

11.On-shell условие для энергии $A - Z$ - смешивания:

$$\Re e\, \hat{\Sigma}_{AZ}(M_A^2) = 0. \tag{62}$$

5.2. Алгебраическая редукция скалярных интегралов

- Амплитуда процесса, как правило, представляется в виде линейной комбинации одно-, двух-, трех-, четырехточечных скалярных интегралов.
- Вплоть до конца 70-ых годов XX столетия не было известно алгоритмов расчета данных интегралов в общем случае.
- Впервые алгоритм вычисления интегралов в общем случае был представлен в работах:

[29] 't Hooft G. and Veltman M. Scalar one loop integrals // Nucl. Phys. B 1979. V. 153. P. 365-401

[30] Passarino G. and Veltman M. One loop corrections for e^+e^- - annihilation into $\mu^+\mu^-$ in the weinberg model // Nucl. Phys. B 1979. V. 160. P. 151.

Здесь впервые получено выражение для C_0 в виде суммы 12 дилогарифмов.

Подход с использованием кинематических детерминантов

[31] G. J. van Oldenborgh, J. A. M. Vermaseren// Z. Phys. **C46**, (1990) 425.

Интегрирование с использованием представления Меллина-Барнса

[32] A.I.Davydychev, J.Math.Phys. **32**, (1991) 1052.

[33] A.I.Davydychev J.Math.Phys. **33**, (1992) 358.

[34] É. É. Boos and A. I. Davydychev, Theor. Math. Phys. **89**, (1991) 1052.

Полиномиальная техника Гегенбауэра

[35] A.E.Terrano, Phys.Lett.**B** **93**, (1980) 424.

Интегрирование по частям

[36] F.V.Tkachov, Phys.Lett.B **100**, (1981) 65; K.G.Chetyrkin, F.V.Tkachov, Nucl.Phys.B **192**, (1981) 159.

Интег-вание в пространстве с отрицательной размерностью

[37] I. G. Halliday, R. M. Ricotta, Phys.Lett.B **193**, (1987) 241; G.V.Dunne, I. G. Halliday, Phys.Lett.B **193**, (1987) 247.

[38] A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt, J. Phys. **A31**, (1998) 8023.

Интегрирование функций, разложенных в ряд

[39] M.G.Schmidt, C.Schubert, Phys. Rev. D **53**, (1996) 2150.

Метод дифференциальных уравнений

[40] T. Gehrmann, E. Remiddi, Nucl. Phys. **B 601**, (2001) 287; Nucl. Phys. Proc. Suppl. **89**, (2000) 251. *Ibid*, preprint [hep-ph/0207020].

Тенденции в построении алгоритмов вычисления

↙ ↘

Построение обобщенных аналитических структур – результатов расчета указанных интегралов

Решение проблем численного интегрирования. Адаптация аналитических решений к машинным кодам

☞ Основное количество технических проблем в численном интегрировании обусловлено

- непреднамеренным выходом в комплексную плоскость переменной интегрирования, когда это можно избежать, тем самым уменьшить ошибку вычислений;
- трудностями учета большого многообразия свойств специальных функций при написании программ, способствующих редукции итогового результата;
- в традиционных алгоритмах редукции интеграла нередко проводятся замены переменных, справедливые лишь при определенных значениях параметров преобразования. Выход за пределы области допустимых значений приводит к появлению сингулярных результатов, неустраняемых программой автоматически.

Необходимо построить новое представление для интегралов B_0, C_0, удобное в применении используемой схемы перенормировки и для построения компьютерных программ расчета.

Общая схема расчета скалярных интегралов

☞ Данные интегралы – несобственные $\Longrightarrow$ м. б. расходящимися. Для устранения у.ф.

расходимостей – метод размерной регуляризации.

1. ***Переход в $\mathcal{D}$ - мерное пространство***

➾ Рассмотрение $\mathcal{D}$ - мерного аналога функции в пространстве Минковского ($\mathcal{D} < 4$).

➾ Если $\mathcal{D}$ не фиксировано $\Longrightarrow$ ничего нельзя сказать о характере расходимости $\Longrightarrow$ можно манипулировать с подинтегральной функцией как с ограниченной гладкой функцией.

➾ При этом

$$\lim_{\mathcal{D}\to 4} \mu^{4-\mathcal{D}} \int \frac{\mathbf{d}^{\mathcal{D}}\mathbf{q}}{(\mathbf{2}\pi)^{\mathcal{D}}} [\ldots] = \int \frac{\mathbf{d}^{4}\mathbf{q}}{(\mathbf{2}\pi)^{4}} [\ldots] \tag{63}$$

здесь μ - параметр размерной регуляризации – сохраненяет размерность данного интеграла в $\mathcal{D}$ измерениях для сохранения калибровочной инвариантности.

2. ***Параметризация Фейнмана***

➾ Подинтегральная функция (63) определяется произведением пропагаторов $\Rightarrow$ интегрирование по импульсу затруднительно.

➾ Для интегрирования подинтегральная функция д. иметь структуру типа $1/[q^2 + M^2]^N$. В работе

[41] R. P. Feynman // Phys. Rev. **76** (1949), 769.

предложен подход параметризации скалярных интегралов $\Rightarrow$ переопределению подинтегральной функции с помощью выражения

$$\frac{1}{\mathbf{D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} ... D_N^{\alpha_N}}} = \frac{\mathbf{\Gamma}(\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \alpha_\mathbf{i})}{\prod_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{\Gamma}(\alpha_\mathbf{i})} \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{\mathbf{N}} \mathbf{dx_1 dx_2 ... dx_N} \delta \left(\mathbf{1} - \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{x_i}\right) \times \frac{\mathbf{x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2 - 1} ... x_N^{\alpha_N - 1}}}{\left(\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{D_i x_i}\right)^{(\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \alpha_\mathbf{i})}}$$

- $\Rightarrow$ в подинтегральном выражении образуется необходимая комбинация по переменной q.
- Выделение полного квадрата и переход к новой переменной $q^{'}$ посредством сдвига импульса на конечную величину.

3. ***Поворот Вика. Интегрирование в $\mathcal{D}$ - мерном евклидовом пространстве***

$$\left\{\mathbf{q_0^{'}} \to i\mathbf{q_0^E}, \quad \mathbf{q_i^{'}} \to \mathbf{q_i^E}, \mathbf{i} = \overrightarrow{1, \mathcal{D} - 1}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\mathbf{dq}^{'} \to i\mathbf{dq_E}, \quad \mathbf{q}^{'\mathbf{2}} \to -\mathbf{q_E^2}\right\} \tag{64}$$

$$\int \frac{\mathbf{d}^{\mathcal{D}} \mathbf{q_E}}{[\mathbf{q_E^2} + \mathbf{M^2}]^\mathbf{n}} = \pi^{\frac{\mathcal{D}}{\mathbf{2}}} \frac{\mathbf{\Gamma}(\mathbf{n} - \frac{\mathcal{D}}{\mathbf{2}})}{\mathbf{\Gamma}(\mathbf{n})} (\mathbf{M^2})^{-(\mathbf{n} - \frac{\mathcal{D}}{\mathbf{2}})} \tag{65}$$

4. ***Предельный переход $\mathcal{D} \to 4$. Дифференциация результата***

➾ разложение Γ - функции

$$\lim_{\varepsilon\to\mathbf{0}} \mathbf{\Gamma}(-\mathbf{n}+\varepsilon) = \frac{(-\mathbf{1})^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}\left[\frac{\mathbf{1}}{\varepsilon} + \tilde{\psi}(\mathbf{n}+\mathbf{1}) + \mathcal{O}(\varepsilon)\right] \tag{66}$$

где $\tilde{\psi}(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \gamma_e$, $\gamma_e = 0.5772157$ - постоянная Эйлера-Маскерони; параметр ε определяется как

$$\varepsilon = \mathbf{4} - \mathcal{D} \to \mathbf{0} \quad \text{при} \quad \mathcal{D} \to \mathbf{4} - \mathbf{0} \tag{67}$$

$$\mathbf{a}^{\varepsilon} = \mathbf{1} + \varepsilon \ln \mathbf{a}, \quad \text{при} \quad \varepsilon \to \mathbf{0} \tag{68}$$

➾ расходящаяся часть интеграла:

$$\mathbf{\Delta}_{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to\mathbf{0}}\left(\frac{\mathbf{2}}{\varepsilon} + \ln(\mathbf{4}\pi) - \gamma_{\mathbf{e}}\right) \tag{69}$$

5. ***Редукция конечной части интеграла*** – ряд алгебраических преобразований, процедуры вычисления интегралов, сведение к набору специальных функций.

- необходимо провести детальный анализ поведения подинтегральной функции и выявить возможные варианты вычисления первообразной, соответствующие определенным областям пространства параметров скалярного интеграла;

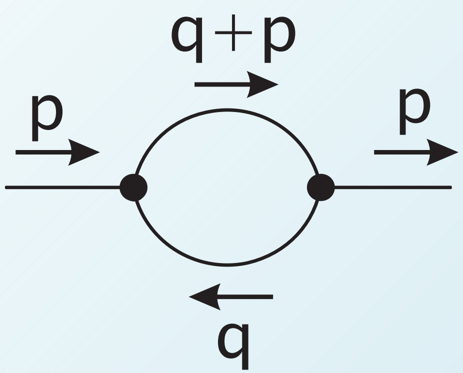
- вычисляем первообразные в каждом возможном варианте, избегая по возможности выхода в комплексную плоскость переменной интегрирования;
- решение в каждом варианте представляется в дифференцированной форме - в виде суммы действительной и мнимой части. Итоговый результат представляется деревом всевозможных редуцированных решений.

Двухточечная скалярная функция B_0

$$\frac{i}{16\pi^2}\mathbf{B_0}(\mathbf{p^2},\mathbf{m_1^2},\mathbf{m_2^2}) = \int \frac{\mathbf{d^4q}}{(\mathbf{2}\pi)^4}\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{q^2}-\mathbf{m_1^2}+i\delta)((\mathbf{q}+\mathbf{p})^2-\mathbf{m_2^2}+i\delta)} \quad (70)$$

➠ $\mathcal{D}$ - мерный аналог интеграла в пространстве Минковского

$$\frac{i}{16\pi^2}\mathbf{B_0^{\mathcal{D}}}(\mathbf{p^2},\mathbf{m_1^2},\mathbf{m_2^2}) = \mu^{4-\mathcal{D}}\int \frac{\mathbf{d^{\mathcal{D}}q}}{(\mathbf{2}\pi)^{\mathcal{D}}}\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{q^2}-\mathbf{m_1^2}+i\delta)((\mathbf{q}+\mathbf{p})^2-\mathbf{m_2^2}+i\delta)} \quad (71)$$



(б)

➠ Параметризация Фейнмана

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{D_1D_2}} = \int_0^1 \frac{\mathbf{1}}{[\mathbf{D_1x}+\mathbf{D_2}(\mathbf{1}-\mathbf{x})]^2} \quad (72)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{D_1} &= ((\mathbf{q}+\mathbf{p})^2-\mathbf{m_2^2}+i\delta) \\ \mathbf{D_2} &= (\mathbf{q^2}-\mathbf{m_1^2}+i\delta) \end{aligned}\right\} \quad (73)$$

$$\frac{i}{16\pi^2}\mathbf{B_0^{\mathcal{D}}}(\mathbf{p^2},\mathbf{m_1^2},\mathbf{m_2^2}) = \mu^{4-\mathcal{D}}\int_0^1\mathbf{dx}\int \frac{\mathbf{d^{\mathcal{D}}q'}}{(\mathbf{2}\pi)^{\mathcal{D}}}\frac{\mathbf{1}}{[\mathbf{q'^2}-\mathbf{M^2}]^2} \quad (74)$$

где

$$\mathbf{q'} = \mathbf{q}+\mathbf{p\,x}, \qquad \mathbf{M^2} = \mathbf{p^2x^2}-\mathbf{x}(\mathbf{p^2}+\mathbf{m_1^2}-\mathbf{m_2^2})+\mathbf{m_1^2}-i\delta \quad (75)$$

- поворот Вика (64), интегрирование в евклидовом $\mathcal{D}$ - пространстве с учетом (65)

$$\frac{i}{16\pi^2}\mathbf{B}_0^{\mathcal{D}}(\mathbf{p^2},\mathbf{m_1^2},\mathbf{m_2^2}) = \frac{i}{16\pi^2}\mathbf{\Gamma}\left(\frac{\varepsilon}{\mathbf{2}}\right)\int_0^1 \mathbf{dx}\left(\frac{\mathbf{4}\pi\mu^{\mathbf{2}}}{\mathbf{M^2}}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \tag{76}$$

с учетом

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{\Gamma}\left(\tfrac{\varepsilon}{\mathbf{2}}\right) = \tfrac{\mathbf{2}}{\varepsilon} - \gamma_{\mathbf{E}} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &\left(\tfrac{\mathbf{4}\pi\mu^{\mathbf{2}}}{\mathbf{M^2}}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} = \mathbf{1} + \tfrac{\varepsilon}{\mathbf{2}}\ln\left[\tfrac{\mathbf{4}\pi\mu^{\mathbf{2}}}{\mathbf{M^2}}\right] \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

- Предельный переход

$$\mathbf{B_0}(\mathbf{p^2},\mathbf{m_1^2},\mathbf{m_2^2}) = \lim_{\mathcal{D}\to 4}\mathbf{B}_0^{\mathcal{D}}(\mathbf{p^2},\mathbf{m_1^2},\mathbf{m_2^2}) = \left[\mathbf{\Delta}_\varepsilon + \ln\mu^{\mathbf{2}} - \mathcal{I}(\mathbf{p^2},\mathbf{m_1^2},\mathbf{m_2^2})\right] \tag{78}$$

где

$$\mathcal{I}(\mathbf{p^2},\mathbf{m_1^2},\mathbf{m_2^2}) = \int_0^1 \mathbf{dx}\ln\left[\mathbf{M^2}\right] = \int_0^1 \mathbf{dx}\ln\left[\mathbf{ax^2}+\mathbf{bx}+\mathbf{c}\right] \tag{79}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{p^2}, \quad \mathbf{b} = -(\mathbf{p^2}+\mathbf{m_1^2}-\mathbf{m_2^2}), \quad \mathbf{c} = \mathbf{m_1^2} \tag{80}$$

- Редукция конечной части
  - Случай № 1: $a \neq 0;\ b, c \in \Re$.

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}, \tag{81}$$

$$\mathfrak{D} = \mathbf{b^2 - 4ac} \tag{82}$$

→ *Ситуация № 1*: $\mathfrak{D} \geq 0$:

$$\mathbf{x_{1,2}} = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}} \pm \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2a}}\sqrt{\mathbf{b^2 - 4ac}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{m_1^2 - m_2^2}}{\mathbf{2p^2}} \pm \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2p^2}}\sqrt{\lambda(\mathbf{p^2}, \mathbf{m_1^2}, \mathbf{m_2^2})} \tag{83}$$

где

$$\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz} \tag{84}$$

$$\mathcal{I}_{11} = \ln|a| + i\pi\theta(-a) - 2 + \sum_{i=1}^{2}\left[(1-x_i)\ln|1-x_i| + x_i\ln|x_i| + \right.$$
$$\left. + i\pi\left[\theta(x_i - 1 - \epsilon_i) + x_i\theta(x_i)\theta(1-x_i)\right]\right] \tag{85}$$

→ *Ситуация № 2*: $\mathfrak{D} < 0$:

$$\mathcal{I}_{\mathbf{12}} = \ln|\mathbf{a}| + i\pi\theta(-\mathbf{a}) + \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}\right)\ln\left[\mathbf{1} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} + \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}\right] - \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}\ln\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}} - \mathbf{2} + \tag{86}$$

$$+\frac{\sqrt{-\lambda(\mathbf{p^2}, \mathbf{m_1^2}, \mathbf{m_2^2})}}{\mathbf{a}}\left[\arctan\left[\frac{\mathbf{b}+\mathbf{2a}}{\sqrt{-\lambda(\mathbf{p^2}, \mathbf{m_1^2}, \mathbf{m_2^2})}}\right]-\arctan\left[\frac{\mathbf{b}}{\sqrt{-\lambda(\mathbf{p^2}, \mathbf{m_1^2}, \mathbf{m_2^2})}}\right]\right] \tag{87}$$

где

$$\mathbf{x}^{'}=\mathbf{x}+\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}, \eta_{\mathbf{2}}=\mathbf{1}+\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}, \eta_{\mathbf{1}}=\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}, \mathbf{g}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2|a|}}\sqrt{-\mathfrak{D}} \tag{88}$$

- Случай № 2: $a=0,\ b\neq 0,\ c\in\Re$

$$\mathcal{I}_2=\int_0^1 dx\ln\left[bx+c\right]=\ln|b|+\left(1+\frac{c}{b}\right)\ln\left|1+\frac{c}{b}\right|-\frac{c}{b}\ln\left|\frac{c}{b}\right|-1+$$

$$+i\pi\left[1+\theta(-b)-\theta\left(1+\frac{c}{b}+\epsilon\right)-\frac{c}{b}\theta\left(-\frac{c}{b}\right)\theta\left(1+\frac{c}{b}\right)\right] \tag{89}$$

- Случай № 3: $a=0,\ b=0,\ c\neq 0$

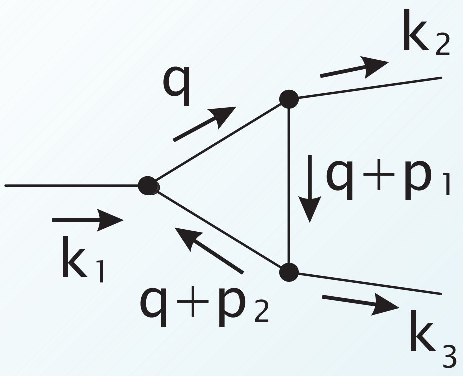
$$\mathcal{I}_{\mathbf{3}}=\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}\mathbf{dx}\ln|\mathbf{c}|=\ln|\mathbf{c}|+i\pi\theta(-\mathbf{c}) \tag{90}$$

$$\mathcal{I} = \left\{ \begin{array}{l} \text{если} \quad a \neq 0; b, c \in \Re, \quad \text{то} \quad \mathcal{I}_1 = \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{I}_{11}, (85), & \text{если} \quad \mathfrak{D} \geq 0, \\ \mathcal{I}_{12}, (87), & \text{если} \quad \mathfrak{D} < 0 \end{array} \right\}, \\ \text{если} \quad a = 0, b \neq 0, c \in \Re, \quad \text{то} \quad \mathcal{I}_2, (89), \\ \text{если} \quad a, b = 0, c \neq 0, \quad \text{то} \quad \mathcal{I}_3, (90) \end{array} \right\} \tag{91}$$

Трехточечная скалярная функция C_0

$$\frac{i}{16\pi^2}\mathbf{C_0}(\mathbf{p_1^2}, \mathbf{p_2^2}, \mathbf{p_1 p_2}, \mathbf{m_1^2}, \mathbf{m_2^2}, \mathbf{m_3^2}) = \int \frac{\mathbf{d^4 q}}{(\mathbf{2}\pi)^4} \times$$
$$\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{q^2} - \mathbf{m_1^2} + i\delta)((\mathbf{q} + \mathbf{p_1})^2 - \mathbf{m_2^2} + i\delta)((\mathbf{q} + \mathbf{p_2})^2 - \mathbf{m_3^2} + i\delta)} \tag{92}$$

Особенность интеграла - не содержит ультрафиолетовой расходимости



(в)

➠ Параметризация Фейнмана

$$\frac{1}{D_1D_2D_3} = 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{[D_1(1-x-y)+D_2x+D_3y]^3} \qquad (93)$$

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= (q^2 - m_1^2 + i\delta) \\ D_2 &= ((q+p_1)^2 - m_2^2 + i\delta) \\ D_3 &= ((q+p_2)^2 - m_3^2 + i\delta) \end{aligned}\right\} \qquad (94)$$

$$\frac{i}{16\pi^2}C_0(p_1^2, p_2^2, p_1p_2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4q'}{(2\pi)^4}\frac{1}{[q'^2 - M^2]^3} \qquad (95)$$

где

$$\left.\begin{aligned} q' &= q + p_1x + p_2y, \\ M^2 &= p_1^2x^2 + p_2^2y^2 + 2p_1p_2xy - p_1^2x - p_2^2y + m_2^2x + m_3^2y + m_1^2(1-x-y) - i\delta \end{aligned}\right\} \qquad (96)$$

➠ поворот Вика (64), интегрирование в евклидовом 4 - пространстве с учетом (65)

$$C_0(p_1^2, p_2^2, p_1p_2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = -\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{M^2} \qquad (97)$$

Замена: $y \to 1-y$, $x \leftrightarrow y$

$$\mathbf{C_0(p_1^2; p_2^2; p_1 p_2; m_1^2; m_2^2; m_3^2) = -\int_0^1 dx \int_0^x \frac{dy}{ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f}}, \tag{98}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = p_2^2,\ b = p_1^2,\ c = -2(p_1 p_2),\ d = m_1^2 - p_2^2 - m_3^2, \\ e = m_2^2 + 2p_1 p_2 - p_1^2 - m_1^2,\ f = m_3^2 - i\delta \end{array} \right\} \tag{99}$$

Поворот в плоскости OXY:

$$\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x' \\ y' \end{array} \right) \tag{100}$$

Требование: равенство нулю коэффициента при $x'y'$

$$\tan \mathbf{2}\alpha = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{b-a}} = \kappa \tag{101}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\sqrt{1+\kappa^2}}}};\ \sin\alpha = \mathbf{sgn}\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \arctan\kappa\right] \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\sqrt{1+\kappa^2}}}} \tag{102}$$

$$\mathbf{C_0 = -\left[\int_{y_1'}^{y_2'} dy' \int_{x_1'}^{x_2'} dx' + \int_{y_2'}^{y_3'} dy' \int_{x_3'}^{x_2'} dx'\right] \frac{1}{a_0 x'^2 + b_0 y'^2 + d_0 x' + e_0 y' + f_0}} \tag{103}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} a_0 = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha + c\cos\alpha\sin\alpha, & x_1' = -\cot\alpha y', \\ b_0 = a\sin^2\alpha + b\cos^2\alpha - c\cos\alpha\sin\alpha, & x_2' = \cos\alpha + \sin\alpha\tan\alpha + \tan\alpha, \\ d_0 = d\cos\alpha + e\sin\alpha, & x_3' = \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}y', \\ e_1 = -d\sin\alpha + e\cos\alpha, & y_1' = -\sin\alpha,\ y_2' = 0, \\ f_0 = f, & y_3' = \cos\alpha - \sin\alpha \end{array}\right\} \tag{104}$$

➠ Редукция интеграла

➾ **Случай № 1**: $a_0 \neq 0$

Преобразование сдвига:

$$\mathbf{x_1 = x' + \frac{d_1}{2a_1},\ \ y_1 = y',\ \ x_{1i} = x_i' + \frac{d_1}{2a_1}} \tag{105}$$

$$\mathbf{C_{01} = -\left[\int_{y_1'}^{y_2'} dy_1 \int_{x_{11}}^{x_{12}} dx_1 + \int_{y_2'}^{y_3'} dy_1 \int_{x_{13}}^{x_{12}} dx_1\right] \frac{1}{a_0 x_1^2 + b_0 y_1^2 + e_0 y_1 + f_0 - d_0^2/4a_0}} \tag{106}$$

$$C_{01} = -\frac{1}{a_1}\left[\sin\alpha\mathcal{AT}\left[a_1, b_{11}, c_{11}, d_{11}, e_{11}, f_{11}, g_{11}\right] + \right.$$
$$\left. + \ (\cos\alpha - \sin\alpha)\mathcal{AT}\left[a_1, b_{12}, c_{12}, d_{12}, e_{12}, f_{12}, g_{12}\right]\right] \tag{107}$$

$$\mathcal{AT}\left[a, b, c, d, e, f, g\right] = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\left[\arctan\left[\frac{dy + e}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\right] - \right.$$
$$\left. - \arctan\left[\frac{fy + g}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\right]\right] \tag{108}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_{11} = b_0 \sin^2\alpha/a_0, & a_{12} = b_0(\cos\alpha - \sin\alpha)^2/a_0, \\ b_{11} = -e_0 \sin\alpha/a_0 & b_{12} = e_0(\cos\alpha - \sin\alpha)/a_0, \\ c_{11} = c_{12} = \frac{f_0}{a_0} - \frac{d_0^2}{4a_0^2}, & e_{11} = e_{12} = \cos\alpha + \sin\alpha\tan\alpha + d_0/2a_0, \\ d_{11} = -\tan\alpha\sin\alpha, & d_{12} = \tan\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha), \\ f_{11} = \cos\alpha, & f_{12} = \cos\alpha + \sin\alpha, \\ g_{11} = g_{12} = \frac{d_0}{2a_0} & \end{array} \right\} \tag{109}$$

➾ **Случай № 2**: $a_0 \equiv 0, d_0 \neq 0$

$$
\begin{aligned}
C_{02} = & - \left[\int_{y_1'}^{y_2'} dy' \int_{x_1'}^{x_2'} dx' + \int_{y_2'}^{y_3'} dy' \int_{x_3'}^{x_2'} dx' \right] \frac{1}{b_0 y'^2 + d_0 x' + e_0 y' + f_0} = \\
& = - \int_{y_1'}^{y_2'} dy \left[\ln[b_0 y^2 + e_0 y + f_0 + d_0 x_2'] - \ln[b_0 y^2 + e_0 y + f_0 + d_0 x_1'] \right] - \\
& - \int_{y_2'}^{y_3'} dy \left[\ln[b_0 y^2 + e_0 y + f_0 + d_0 x_2'] - \ln[b_0 y^2 + e_0 y + f_0 + d_0 x_3'] \right] \qquad (110)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{02} = & - \sin\alpha \left[\mathcal{I}(a_{21}, b_{21}, c_{21}) + \mathcal{I}(a_{22}, b_{22}, c_{22}) \right] - \\
& - (\cos\alpha - \sin\alpha) \left[\mathcal{I}(a_{23}, b_{23}, c_{23}) + \mathcal{I}(a_{24}, b_{24}, c_{24}) \right] \qquad (111)
\end{aligned}
$$

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{21}=a_{22}=b_0\sin^2\alpha, & b_{21}=\sin\alpha(d_0\tan\alpha-e_0),\\ c_{21}=c_{23}=\frac{f_0}{a_0}-\frac{d_0^2}{4a_0^2}, & b_{22}=-(d_0\cos\alpha+e_0\sin\alpha),\\ c_{22}=c_{24}=f_0, & b_{23}=(b_0+d_0\tan\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha),\\ a_{23}=a_{24}=b_0(\cos\alpha-\sin\alpha)^2, & b_{24}=(d_0+e_0)\cos\alpha+(d_0-e_0)\sin\alpha, \end{array}\right\} \qquad (112)$$

интеграл $\mathcal{I}$ определяется выражением (91).

➾ **Случай № 3**: $a_0\equiv 0, d_0\equiv 0$

$$C_{03}=-\left[\int_{y_1'}^{y_2'}dy'\int_{x_1'}^{x_2'}dx'+\int_{y_2'}^{y_3'}dy'\int_{x_3'}^{x_2'}dx'\right]\frac{1}{b_0y'^2+e_0y'+f_0}=$$

$$=-\int_{y_1'}^{y_2'}\frac{(x_2'-x_1')dy}{b_0y^2+e_0y+f_0}-\int_{y_2'}^{y_3'}\frac{(x_2'-x_3')dy}{b_0y^2+e_0y+f_0} \qquad (113)$$

или

$$\mathbf{C_{03}}=\mathcal{F}[\mathbf{a_{31}},\mathbf{b_{31}},\mathbf{c_{31}},\mathbf{d_{31}},\mathbf{e_{31}}]+\mathcal{F}[\mathbf{a_{32}},\mathbf{b_{32}},\mathbf{c_{32}},\mathbf{d_{32}},\mathbf{e_{32}}] \qquad (114)$$

где

$$\mathcal{F}[a,b,c,d,e] = \int_0^1 dy \frac{dy+e}{ay^2+by+c} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2a}\left[d\ln\left[1+\frac{a+b}{c}\right] + \frac{2(bd-2ae)}{\sqrt{b^2-4ac}}\left[arctanh\left[\frac{b+2a}{\sqrt{b^2-4ac}}\right] - \right.\right. \\ \left.\left. -arctanh\left[\frac{b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right]\right]\right], \quad \text{при} \quad a,b,d \neq 0 \\ \frac{d}{b} + \frac{be-cd}{b^2}\ln\left[1+\frac{b}{c}\right], \quad \text{при} \quad a \equiv 0, b, d \neq 0 \\ \frac{d}{2c} + \frac{e}{c}, \quad \text{при} \quad a, b \equiv 0, d \neq 0 \\ \infty, \quad \text{при} \quad c \equiv 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_{31} = b_0 \sin^2\alpha, & a_{32} = b_0(\cos\alpha - \sin\alpha)^2, \\ b_{31} = -e_0 \sin\alpha, & b_{32} = e_0(\cos\alpha - \sin\alpha), \\ c_{31} = c_{32} = f_0, & d_{31} = -e_{31} = \sin\alpha(\sin\alpha\tan\alpha + \cos\alpha), \\ & d_{32} = -e_{32} = (\cos\alpha - \sin\alpha)(\sin\alpha\tan\alpha + \cos\alpha), \end{array} \right\} \tag{115}$$

$$C_0(p_1^2, p_2^2, p_1p_2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = \begin{cases} a_0, d_0 \neq 0; \Rightarrow C_{01}, \\ a_0 \equiv 0, d_0 \neq 0, \Rightarrow C_{02}, \\ a_0, d_0 \equiv 0, \Rightarrow C_{03}. \end{cases} \quad (116)$$

Полученные результаты находятся в хорошем согласии с результатами работ [29], [42], полученными ранее для отдельных частных случаев.

[42] G.C. Devidze, G.R. Jibuti// E-print:hep-ph/9710283, 11pp.

6.1 Константы взаимодействия в однопетлевом приближении

☞ В [13] было показано, что константы $\lambda_{hhh}, \lambda_{hhH}$ характеризуются максимальными областями чувствительности.

☞ Распад $H \to hh$ увеличивает полное сечение процесса парного рождения БХ на e^+e^-–коллайдере на порядок [13] и на 2 порядка в случае процесса парного рождения БХ посредством глюонной аннигиляции на LHC [14]. Расчет ширины $\Gamma(H \to hh)$ в высших порядках теории возмущений (ТВ) неразрывно связан с вычислением констант λ_{hhh}, λ_{hhH}, λ_{hHH} в соответствующем порядке ТВ.

$$\lambda^{(1)}_{ijk} = \lambda^{(0)}_{ijk} + \Delta\hat{\lambda}^{(1)}_{ijk}, \;\; \Delta\hat{\lambda}^{(1)}_{ijk} = \sum_{\ell,\{m\}} T^{ijk}_{\ell,\{m\}} + \delta\Gamma_{ijk}, \;\; i,j,k = h,H, \tag{117}$$

$$\Delta\lambda^{(1)}_{h_\ell h_m h_n} = \sum_{\substack{s = \tilde{t},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{\tau} \\ i,j=1,2}} \left[T^{h_\ell h_m h_n}_{12,\{s_i\, s_j\}} + \left[\begin{array}{c} h_\ell \to h_m \to h_n \to h_\ell \\ p_3 \to p_2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} h_\ell \to h_n \to h_m \to h_\ell \\ p_3 \to p_1 \end{array} \right] \right] +$$

$$+ \sum_{f=t,b,c,\tau} T^{h_\ell h_m h_n}_{18,\{fff\}} + \sum_{\substack{s = \tilde{t},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{\tau} \\ i,j,k=1,2}} T^{h_\ell h_m h_n}_{25,\{s_i s_j s_k\}}, \;\; \{h_\ell, h_m, h_n\} = \{h, H\}, \tag{118}$$

$$\Delta\lambda^{(1)}_{h_\ell AA} = \sum_{\substack{s = \tilde{t},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{\tau} \\ i,j=1,2}} T^{h_\ell AA}_{12,\{s_i\, s_j\}}(p_3 \to p_1) + \sum_{f=t,b,c,\tau} 2T^{h_\ell AA}_{18,\{fff\}} + \sum_{\substack{s = \tilde{t},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{\tau} \\ i,j,k=1,2}} T^{h_\ell AA}_{25,\{s_i s_j s_k\}}, \;\; h_\ell = \{h, H\}, \tag{119}$$

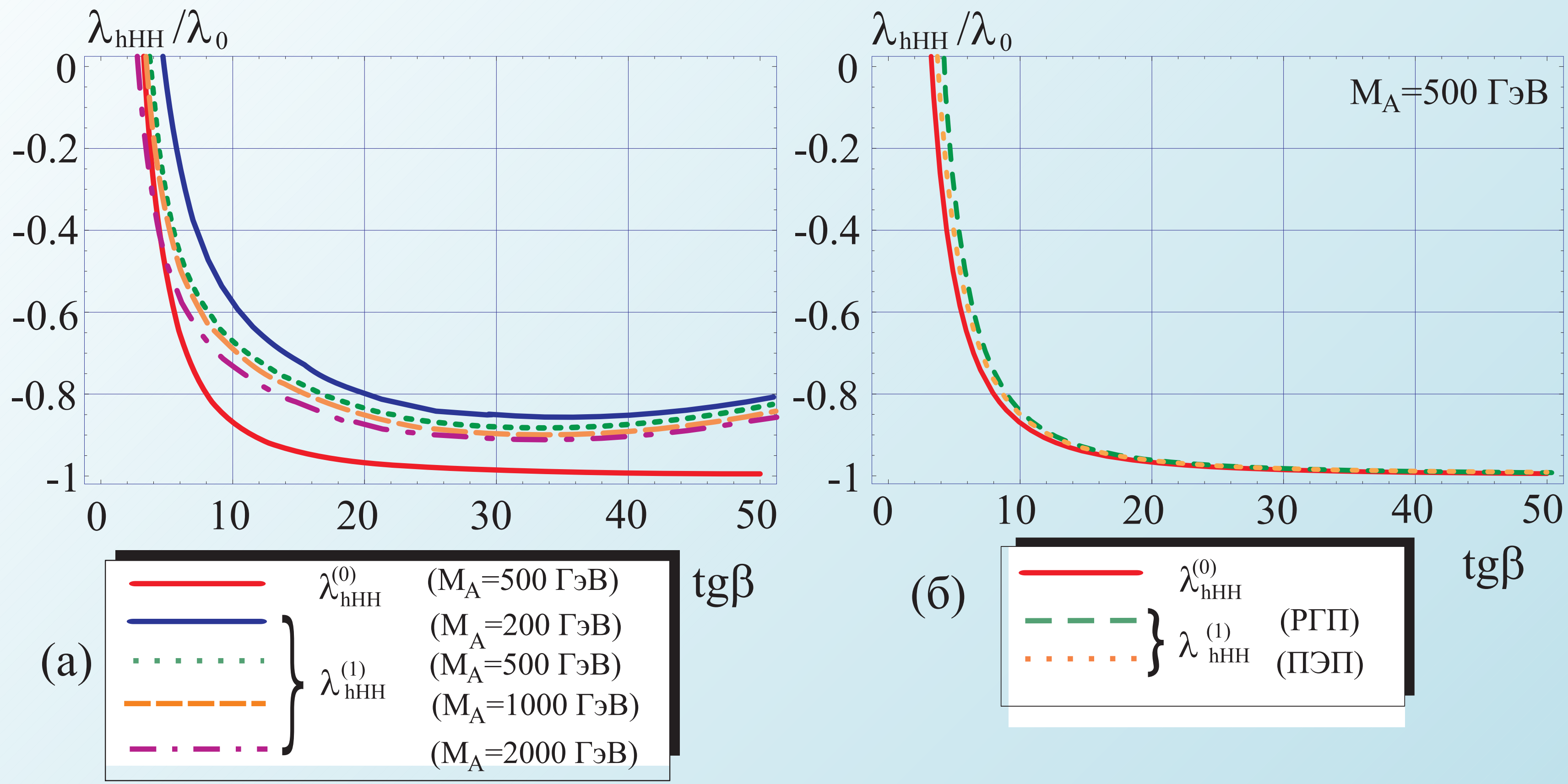


Рис. 8: *Зависимость от* $\mathrm{tg}\,\beta$ *константы* λ_{hHH}, *(в единицах* λ_0*) с учетом (а) юкавских однопетлевых поправок (*$t-b-c-\tau-$*петель) с использованием ФДП и усовершенствованной схемы перенормировки, (б) юкавских* $t-$*поправок в РГП и ПЭП при* $A_f=1$ *ТэВ,* $\mu=0.5$ *ТэВ,* $M_{\tilde{Q}}=M_{\tilde{U}}=M_{\tilde{D}}=M_{\tilde{L}}=M_{\tilde{R}}=1$ *ТэВ.*

6.2 Ширина распада $H \to hh$ в однопетлевом приближении

Как указано ранее сечения процессов парного и трехчастичного рождения БХ определяющим образом зависят от ширины распада, представленной в виде:

$$\Gamma(H \to hh) = \frac{|\mathcal{A}_{H\to hh}|^2}{32\pi M_H}\sqrt{1 - \frac{4M_h^2}{M_H^2}}, \tag{120}$$

Ширина распада $\Gamma(H \to hh)$ была исследована как с учетом $t - \tilde{t}$ – поправок [50], с учетом $t - \tilde{t}$, $b - \tilde{b}$ – поправок [52].

M_h, M_H – физические массы БХ в рассматриваемом приближении, являющиеся вещественными частями полюсов матрицы пропагаторов:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{hh} & \Delta_{hH} \\ \Delta_{hH} & \Delta_{HH} \end{bmatrix}, \tag{121}$$

где
$$\Delta_{hh} = \frac{1}{p^2 - m_h^2 + \hat{\Sigma}_{hh}(p^2) - \frac{\hat{\Sigma}^2_{hH}(p^2)}{p^2 - m_H^2 + \hat{\Sigma}_{HH}(p^2)}},$$

$$\Delta_{HH} = \frac{1}{p^2 - m_H^2 + \hat{\Sigma}_{HH}(p^2) - \frac{\hat{\Sigma}^2_{hH}(p^2)}{p^2 - m_h^2 + \hat{\Sigma}_{hh}(p^2)}},$$

$$\Delta_{hH} = \frac{-\hat{\Sigma}_{hH}(p^2)}{(p^2 - m_h^2 + \hat{\Sigma}_{hh}(p^2))(p^2 - m_H^2 + \hat{\Sigma}_H(p^2)) - \hat{\Sigma}^2_{hH}(p^2)}\,. \tag{122}$$

Полюсы матрицы пропагаторов определяются уравнением вида:

$$\mathrm{Det}[\Delta^{-1}] = 0,$$

$$\text{или}\quad \left[p^2 - m_h^2 + \hat{\Sigma}_{hh}(p^2)\right]\left[p^2 - m_H^2 + \hat{\Sigma}_{HH}(p^2)\right] - \left[\hat{\Sigma}_{hH}(p^2)\right]^2 = 0\,. \tag{123}$$

Для определения амплитуды $\mathcal{A}_{H\to hh}$ необходимо перейти к базису перенормированных полей посредством Z-матрицы:

$$\begin{bmatrix} h \\ H \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} Z_{hh}^{\frac{1}{2}} & Z_{hH}^{\frac{1}{2}} \\ Z_{Hh}^{\frac{1}{2}} & Z_{HH}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_R \\ H_R \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}_{H\to hh} = Z_{HH}^{\frac{1}{2}}\left[Z_{hh}^{\frac{1}{2}}\right]^2 \hat{\lambda}^{(1)}_{hhH} + 2Z_{HH}^{\frac{1}{2}} Z_{hh}^{\frac{1}{2}} Z_{Hh}^{\frac{1}{2}} \hat{\lambda}^{(1)}_{hHH} + 3Z_{hH}^{\frac{1}{2}}\left[Z_{hh}^{\frac{1}{2}}\right]^2 \hat{\lambda}^{(1)}_{hhh}. \tag{124}$$

Элементы Z-матрицы определяются элементами матриц $R_{h,H}$, а именно:

$$Z^{\frac{1}{2}}_{hh} = R_{h_{11}} = 1 - \hat{\Sigma}'_{hh}(M_h^2), \quad Z^{\frac{1}{2}}_{hH} = R_{H_{12}} = -\hat{\Sigma}_{hH}(M_H^2)/(M_H^2 - M_h^2),$$
$$Z^{\frac{1}{2}}_{Hh} = R_{h_{12}} = -\hat{\Sigma}_{hH}(M_h^2)/(M_h^2 - M_H^2), \quad Z^{\frac{1}{2}}_{HH} = R_{H_{22}} = 1 - \hat{\Sigma}'_{HH}(M_H^2). \tag{125}$$

7. Сечения рождения пары БХ в однопетлевом приближении

- алгоритм расчета процессов типа $2 \to 2$ прост;
- поиск процессов с доминирующей ролью петлевых поправок, критериальных процессов в идентификации модели;
- поиск процессов, где роль петлевых вкладов суперпартнеров может быть весьма значительна.

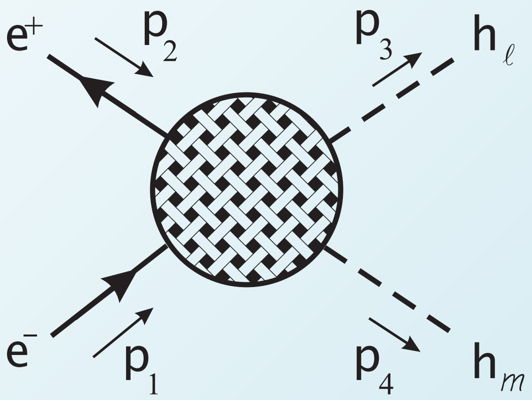
В работе [9] исследован процесс $e^+e^- \to HH$ в СМ в однопетлевом приближении. На примере зависимостей $\sigma(M_H)$ продемонстрировано, что сечение процесса достигает значений $\sigma \sim 10^{-1} - 1$ (фбн).

[9] Gaemers K. and Hoogeveen F. // Z. Phys. 1984. C 26. P. 249.

$$\sigma_{tot} = \int_{t_{min}}^{t_{max}} \left[\frac{d\sigma}{dt}\right] dt, \tag{126}$$

где $\quad t_{\{min,max\}} = \frac{1}{2}\left[M_{h_\ell}^2 + M_{h_m}^2\right] - \frac{s}{2} \mp \frac{s}{2}\kappa. \qquad (127)$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s^2(1+\delta_{h_\ell h_m})} \sum_{s_+,\, s_-} \left|\mathcal{A}_{[i\to f]}\right|^2, \quad \delta_{h_\ell h_m} = \left\{\begin{array}{ll} 1, & h_\ell \equiv h_m, \\ 0, & h_\ell \neq h_m \end{array}\right\}, \tag{128}$$



$$\left.\begin{array}{l} p_1 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1,0,0,1), \quad p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1,0,0,-1), \quad p_1^2 = m_1^2 = 0, \quad p_2^2 = m_2^2 = 0 \\ p_3 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1 + \frac{M_{h_\ell}^2 - M_{h_m}^2}{s}, \kappa\sin\theta, 0, \kappa\cos\theta), \quad p_3^2 = m_3^2 = M_{h_\ell}^2, \\ p_4 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1 - \frac{M_{h_\ell}^2 - M_{h_m}^2}{s}, -\kappa\sin\theta, 0, -\kappa\cos\theta), \quad p_4^2 = m_4^2 = M_{h_m}^2, \end{array}\right\} \tag{129}$$

$$\kappa = \frac{1}{s}\sqrt{\lambda(s, M_{h_\ell}^2, M_{h_m}^2)}, \quad \lambda(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz. \tag{130}$$

Рис. 9: К определению кинематики процесса

$$\left.\begin{aligned} &s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \\ &t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 = \tfrac{1}{2}\left[M_{h_\ell}^2 + M_{h_m}^2\right] - \tfrac{s}{2} + \tfrac{s}{2}\kappa\cos\theta, \\ &u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 = \tfrac{1}{2}\left[M_{h_\ell}^2 + M_{h_m}^2\right] - \tfrac{s}{2} - \tfrac{s}{2}\kappa\cos\theta, \\ &s + t + u = M_{h_\ell}^2 + M_{h_m}^2. \end{aligned}\right\} \tag{131}$$

Расчет амплитуд процессов

Амплитуда процесса $\mathcal{A}(e^+e^- \to h_\ell h_m)$, $\{h_\ell, h_m\} = \{h, h\}, \{h, H\}, \{H, H\}$ может быть представлена в виде:

$$\mathcal{A}(e^+e^- \to h_\ell h_m) = \sum_{k=1}^{13} \mathcal{A}_k, \tag{132}$$

$$\mathcal{A}_1 = -e\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)\,\frac{g_{\mu\nu}}{s}\,\left[G^{(1)}_{\gamma h_\ell h_m} p_3^\nu + G^{(2)}_{\gamma h_\ell h_m} p_4^\nu\right], \tag{133}$$

$$\mathcal{A}_2 = -e\bar{v}(p_2)\left[\frac{1-4s_W^2}{4s_W c_W}\gamma^\mu - \frac{1}{4s_W c_W}\gamma^\mu\gamma^5\right] u(p_1)\,\frac{g_{\mu\nu}}{s-M_Z^2}\,\left[G^{(1)}_{Zh_\ell h_m} p_3^\nu + G^{(2)}_{Zh_\ell h_m} p_4^\nu\right], \tag{134}$$

$$\mathcal{A}_3 = -e\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)\frac{g_{\mu\nu}}{s}\,\left[G_{\gamma h}(p_1 + p_2)^\nu\right]\frac{1}{s-M_h^2}\lambda^{(0)}_{hh_\ell h_m}, \tag{135}$$

$$\mathcal{A}_4 = -e\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)\,\frac{g_{\mu\nu}}{s}\,\left[G_{\gamma H}(p_1 + p_2)^\nu\right]\frac{1}{s-M_H^2}\lambda^{(0)}_{Hh_\ell h_m}, \tag{136}$$

$$\mathcal{A}_5 = -e\bar{v}(p_2)\left[\tfrac{1-4s_W^2}{4s_W c_W}\gamma^\mu - \tfrac{1}{4s_W c_W}\gamma^\mu\gamma^5\right]u(p_1)\,\tfrac{g_{\mu\nu}}{s-M_Z^2}\,\left[G_{Zh}(p_1+p_2)^\nu\right]\tfrac{1}{s-M_h^2}\lambda^{(0)}_{hh_\ell h_m}, \tag{137}$$

$$\mathcal{A}_6 = -e\bar{v}(p_2)\left[\tfrac{1-4s_W^2}{4s_W c_W}\gamma^\mu - \tfrac{1}{4s_W c_W}\gamma^\mu\gamma^5\right]u(p_1)\,\tfrac{g_{\mu\nu}}{s-M_Z^2}\,\left[G_{ZH}(p_1+p_2)^\nu\right]\tfrac{1}{s-M_H^2}\lambda^{(0)}_{Hh_\ell h_m}, \tag{138}$$

$$\mathcal{A}_7 = -e\bar{v}(p_2)\left[\tfrac{1-4s_W^2}{4s_W c_W}\gamma^\mu - \tfrac{1}{4s_W c_W}\gamma^\mu\gamma^5\right]u(p_1)\,\tfrac{g_{\mu\nu}}{s-M_Z^2}\,\left[v^Z_{Ah_\ell}(p_4-p_3)^\nu\right]\tfrac{1}{p_4^2-M_A^2}G_{Ah_m}, \tag{139}$$

$$\mathcal{A}_8 = -e\bar{v}(p_2)\left[\tfrac{1-4s_W^2}{4s_W c_W}\gamma^\mu - \tfrac{1}{4s_W c_W}\gamma^\mu\gamma^5\right]u(p_1)\,\tfrac{g_{\mu\nu}}{s-M_Z^2}\,\left[v^Z_{Gh_\ell}(p_4-p_3)^\nu\right]\tfrac{1}{p_4^2-M_G^2}G_{Gh_m}, \tag{140}$$

$$\mathcal{A}_9 = e\bar{v}(p_2)\left[\tfrac{1-4s_W^2}{4s_W c_W}\gamma^\mu - \tfrac{1}{4s_W c_W}\gamma^\mu\gamma^5\right]u(p_1)\,\tfrac{g_{\mu\nu}}{s-M_Z^2}\,\left[t^{h_\ell}_{ZZ}g^{\nu\lambda}\right]\tfrac{g_{\lambda\rho}}{p_4^2-M_Z^2}\left[G_{Zh_m}p_4^\rho\right], \tag{141}$$

$$\mathcal{A}_{10} = -e\bar{v}(p_2)\left[\tfrac{1-4s_W^2}{4s_W c_W}\gamma^\mu - \tfrac{1}{4s_W c_W}\gamma^\mu\gamma^5\right]u(p_1)\,\tfrac{g_{\mu\nu}}{s-M_Z^2}\,\left[v^Z_{Ah_m}(p_3-p_4)^\nu\right]\tfrac{1}{p_3^2-M_A^2}G_{Ah_\ell}, \tag{142}$$

$$\mathcal{A}_{11} = -e\bar{v}(p_2)\left[\tfrac{1-4s_W^2}{4s_W c_W}\gamma^\mu - \tfrac{1}{4s_W c_W}\gamma^\mu\gamma^5\right]u(p_1)\,\tfrac{g_{\mu\nu}}{s-M_Z^2}\,\left[v^Z_{Gh_\ell}(p_3-p_4)^\nu\right]\tfrac{1}{p_3^2-M_G^2}G_{Gh_\ell}, \tag{143}$$

$$\mathcal{A}_{12} = e\bar{v}(p_2)\left[\tfrac{1-4s_W^2}{4s_W c_W}\gamma^\mu - \tfrac{1}{4s_W c_W}\gamma^\mu\gamma^5\right]u(p_1)\,\tfrac{g_{\mu\nu}}{s-M_Z^2}\,\left[t^{h_m}_{ZZ}g^{\nu\lambda}\right]\tfrac{g_{\lambda\rho}}{p_3^2-M_Z^2}\left[G_{Zh_\ell}p_3^\rho\right], \tag{144}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{13} = \bar{v}(p_2)\Big[&G^{h_\ell h_m}_{131} + G^{h_\ell h_m}_{132}\gamma^5 + G^{h_\ell h_m}_{133}\hat{p}_3 + G^{h_\ell h_m}_{134}\hat{p}_4 + G^{h_\ell h_m}_{135}\hat{p}_1 + G^{h_\ell h_m}_{136}\hat{p}_3\gamma^5 + \\ &G^{h_\ell h_m}_{137}\hat{p}_4\gamma^5 + G^{h_\ell h_m}_{138}\hat{p}_1\gamma^5 + G^{h_\ell h_m}_{139}\hat{p}_3\hat{p}_4 + G^{h_\ell h_m}_{1310}\hat{p}_1\hat{p}_3 + G^{h_\ell h_m}_{1311}\hat{p}_1\hat{p}_4 + G^{h_\ell h_m}_{1312}\hat{p}_3\hat{p}_4\gamma^5 + \\ &+G^{h_\ell h_m}_{1313}\hat{p}_1\hat{p}_3\gamma^5 + G^{h_\ell h_m}_{1314}\hat{p}_1\hat{p}_4\gamma^5\Big]u(p_1).\end{aligned} \tag{145}$$

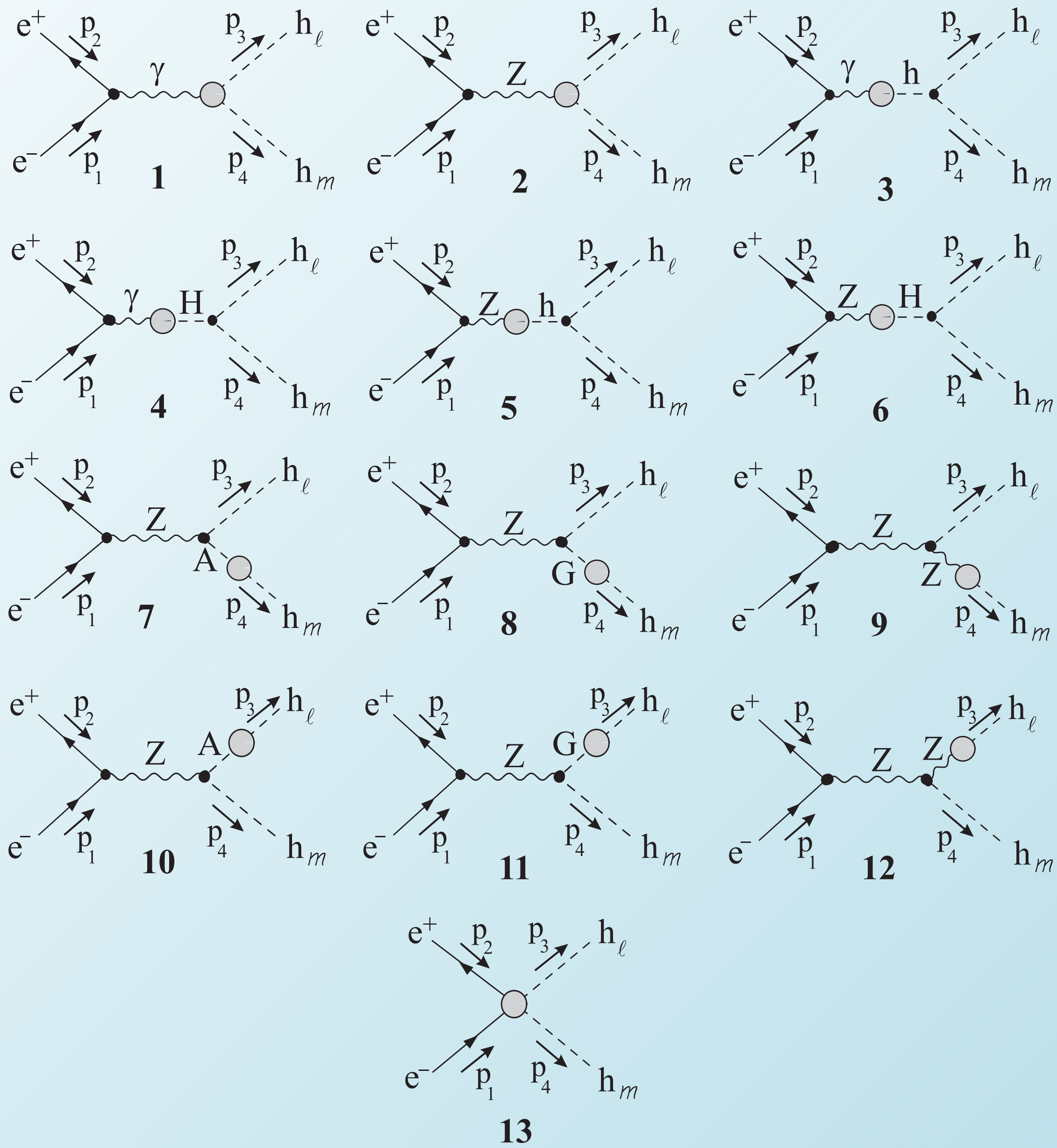


Рис. 10: Система скелетных диаграмм Фейнмана, определяющих амплитуду процесса $e^+e^- \to h_\ell h_m$, где $\{h_\ell, h_m\} = \{h, h\}, \{h, H\}, \{H, H\}$.

$$\sum_{s_+,\, s_-} \left| \mathcal{A}(e^+e^- \to hh) \right|^2 = \mathfrak{S}_{hh} + \mathfrak{S}^*_{hh} + \mathfrak{A}_{hh}, \tag{146}$$

$$\mathfrak{S}_{hh} = \frac{f_{hh}}{s} \Delta G_{\gamma hh} \left[\frac{g_2^2 s_W^2}{s} \Delta\bar{G}_{\gamma hh} - \frac{g_2^2 s_W (1-4s_W^2)}{2(s-M_Z^2)c_W} \Delta\bar{G}_{Zhh} + \frac{i g_2^3 s_W (1-4s_W^2)}{(s-M_Z^2)c_W^2} \Delta\bar{G}^h_{AG} + \right.$$
$$\left. + 2g_2 s_W \Delta\bar{G}^{hh}_{(3,4)} \right] + \frac{f_{hh}}{2c_W(s-M_Z^2)} \Delta G_{Zhh} \left[-\frac{g_2^2(8s_W^4 - 4s_W^2 + 1)}{4c_W(s-M_Z^2)} \Delta\bar{G}_{Zhh} + \frac{i g_2^3 (8s_W^4 - 4s_W^2 + 1)}{(s-M_Z^2)c_W^2} \Delta\bar{G}^h_{AG} + \right.$$
$$\left. + g_2(1-4s_W^2)\Delta\bar{G}^{hh}_{(3,4)} - g_2 \Delta\bar{G}^{hh}_{(6,7)} \right] + \frac{f_{hh}}{c_W^2(s-M_Z^2)} \Delta G^h_{AG} \left[-\frac{g_2^4(8s_W^4 - 4s_W^2 + 1)}{2c_W^2(s-M_Z^2)} \Delta\bar{G}^h_{AG} + \right.$$
$$\left. + i g_2^2 (1-4s_W^2)\Delta\bar{G}^{hh}_{(3,4)} - i g_2^2 \Delta\bar{G}^{hh}_{(6,7)} \right] + s \left| G^{hh}_{131} + (s+t-2M_h^2) G^{hh}_{139} \right|^2 +$$
$$+ s \left| G^{hh}_{132} + (s+t-2M_h^2) G^{hh}_{1312} + (M_h^2 - t) G^{hh}_{1313} + (s+t-M_h^2) G^{hh}_{1314} \right|^2 -$$
$$- f_{hh} \left| \Delta G^{hh}_{(3,4)} \right|^2 - f_{hh} \left| \Delta G^{hh}_{(6,7)} \right|^2, \quad f_{h_\ell h_m} = (M^2_{h_\ell} M^2_{h_m} - (M^2_{h_\ell} + M^2_{h_m})t + t(s+t)), \tag{147}$$

$$\mathfrak{A}_{hh} = \frac{M_W s_{(\alpha-\beta)} f_{hh}}{2c_W^3(M_h^2-M_Z^2)(s-M_Z^2)} G_{Zh} \left[\frac{ig_2^4(8s_W^4-4s_W^2+1)}{c_W^2(s-M_Z^2)} \Delta\bar{G}^h_{AG} + g_2^2(1-4s_W^2)\Delta\bar{G}^{hh}_{(3,4)} - \right.$$

$$\left. -g_2^2\Delta\bar{G}^{hh}_{(6,7)} \right] + 2s\left[(M_h^2-t)G^{hh}_{1310} + (s+t-M_h^2)G^{hh}_{1311}\right] \times \left[\bar{G}^{hh}_{131} + (s+t- \right.$$

$$\left. -2M_h^2)\bar{G}^{hh}_{139}\right], \quad \Delta G^{h_\ell h_m}_{(i,j)} = G^{h_\ell h_m}_{13i} - G^{h_\ell h_m}_{13j},$$

$$\Delta G^{h_\ell}_{AG} = \left[\frac{c_{(\alpha-\beta)}}{(M_A^2-M_{h_\ell}^2)} G_{Ah_\ell} + \frac{s_{(\alpha-\beta)}}{(M_{h_\ell}^2-M_Z^2)} G_{Gh_\ell}\right](M_{h_\ell}^2), \tag{148}$$

Результаты работы [54] получены

- лишь с учетом четырехточечных диаграмм Фейнмана.
- учитывалась упомянутая ранее связь параметров M_2 и M_1.
- Массы всех скалярных лептонов и кварков одинаковые и равны соответственно $M_{\tilde{\ell}} = 300$ ГэВ, $M_{\tilde{q}} = 500$ ГэВ, а параметры $A_t = A_b = 0$ ГэВ.