Введение

1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Семинар № 1. Принцип суперпозиции электрических полей

Теоретический минимум

Напряженность электрического поля - силовая характеристика электрического поля, определяемая отношением силы ($\vec{F}$), действующей со стороны поля на неподвижный электрический заряд, к значению этого заряда (q) т.е.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \tag{1}$$

Закон Кулона: *сила взаимодействия F двух неподвижных точечных зарядов в вакууме пропорциональна произведению их значений ($q_1 \cdot q_2$), обратно пропорциональна квадрату расстояния (r_{12}) между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды*:

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}, \quad F_{12} = k\frac{|q_1||q_2|}{r_{12}^2}, \tag{2}$$

$$k = \left\{ \begin{array}{cc} 1, & \text{СГСЕ}, \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}, & \text{СИ} \end{array} \right\}. \tag{3}$$

Рассмотрим систему N точечных зарядов $q_i, i = \overrightarrow{1, N}$. *Напряженность результирующего электрического поля, создаваемого системой зарядов в произвольно выбранной точке наблюдения A, равна векторной сумме напряженностей электрических полей, создаваемых в данной точке каждым зарядом системы в отдельности*:

$$\vec{E}_A = \sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i \tag{4}$$

Соотношение (4) – *принцип суперпозиции электрических полей в случае системы конечного числа зарядов.* Из принципа суперпозиции следует, что величина и направление электрического поля, создаваемого i-ым точечным зарядом не зависит от положения и величины других зарядов и соответствующих им полей. Однако указанное условие нарушается в случае: а) высокочастотных полей, где играют важную роль квантовые эффекты, б) полей с большими интенсивностями (например, в мощных лазерах).

В случае *непрерывного распределения электрического заряда, принцип суперпозиции электрических полей* представляется в виде:

$$\vec{E}_A = \int d\vec{E} \tag{5}$$

здесь интегрирование производится по полям создаваемым бесконечной системой бесконечно малых зарядов, на которую мы мысленно разбиваем исходную систему конечного заряда. Каждый бесконечно малый заряд можно считать точечным, для которого напряженность электрического поля равна:

$$\vec{E} = \frac{k\, q\, \vec{r}}{r^3}, \tag{6}$$

где $q-$значение точечного заряда, $\vec{r}$ - вектор, проведенный из точки, где находится заряд, в точку наблюдения, $r = |\vec{r}|$. Следовательно (6) можно представить в виде:

$$\vec{E}_\text{А} = k \int \frac{dq \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

Если же рассматриваемая система содержит как точечные, так и протяженные заряды, то принцип суперпозиции можно представить в виде:

$$\vec{E}_\text{А} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i + \int d\vec{E}. \tag{7}$$

При расчете напряженности электрического поля с помощью принципа суперпозиции следует придерживаться следующего алгоритма:

1. Строим схематичный чертеж данной системы зарядов. Записываем принцип суперпозиции (7). Проводим элементарный анализ наличия симметрии у рассматриваемой системы зарядов. Определяем ее тип (например, зеркальная, аксиальная, сферическая симметрии).

2. Выбираем систему координат, с учетом имеющихся типов симметрии, так, чтобы вектор результирующего поля $\vec{E}_\text{А}$ имел минимальное количество ненулевых проекций (это необходимо для сокращения объема математических расчетов). Записываем выражение (7) в проекциях на координатные оси.

3. Если в системе имеются протяженные электрические заряды проводим (мысленное) разбиение данных объектов на бесконечную систему бесконечно малых зарядов. Их форма определяется типом симметрии системы (например, если аксиальная симметрия – на кольца, если

сферическая – сферический слой, кольцо, в случае отсутствия всякой симметрии – куб). Если использовать выражение для напряженности электрического поля элементарного (точечного) заряда, а также связь последнего с линейной, поверхностной и объемной плотностью электрического заряда

$$dq = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda d\ell, & \text{в случае линейных зарядов,} \\ \sigma dS, & \text{в случае поверхностных зарядов,} \\ \rho dV, & \text{в случае объемных зарядов} \end{array} \right\}, \tag{8}$$

то с помощью (5) можно вычислить вклад протяженных зарядов в результирующее поле в точке А.

4. Итоговый результат для $\vec{E}_\text{A}$ представляем в компактной аналитической форме.

Рекомендуемая литература: [1], §§ 1,2; [2], §§ 1.4, 1.7, 1.8, 1.12; [3], § 3.

Примеры решения задач

№ 1.П.1.[а] В вершинах квадрата со стороной a находятся одинаковые одноименные заряды, равные q (см. рис. 1). Какой заряд Q необходимо поместить в центре квадрата, чтобы результирующая сила, действующая на каждый заряд, была равна нулю?

Решение

Рассмотрим действие зарядов, находящихся в точках 1,2,3,4 на заряд Q, находящийся в точке 5 (смотри рис. 1). Очевидно, что сумма сил

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F}_{25} + \vec{F}_{45} = 0 \\ \vec{F}_{15} + \vec{F}_{35} = 0 \end{array} \right\}, \quad \text{для любого } Q$$

и, следовательно, результирующая сила, действующая на заряд Q равна нулю для любого Q, в силу симметрии системы.

Рассмотрим теперь действие зарядов, находящихся в точках 1,2,3,5, на заряд, помещенный в точку 4. Результирующая сила определяется согласно принципу суперпозиции, (4) в виде:

$$\vec{F} = q\vec{E}_O = q(\vec{E}_{14} + \vec{E}_{24} + \vec{E}_{34} + \vec{E}_{54}). \tag{9}$$

Учитывая, что данные заряды точечные, выражение (9), с учетом (6), можно переписать следующим образом:

$$\vec{F} = k\left(\tfrac{q^2}{r_{14}^3}\vec{r}_{14} + \tfrac{q^2}{r_{24}^3}\vec{r}_{24} + \tfrac{q^2}{r_{34}^3}\vec{r}_{34} + \tfrac{qQ}{r_{54}^3}\vec{r}_{54}\right). \tag{10}$$

Согласно условию задачи

$$\vec{F} = 0.$$

Выберем систему координат так, как показано на рисунке, и спроеци-

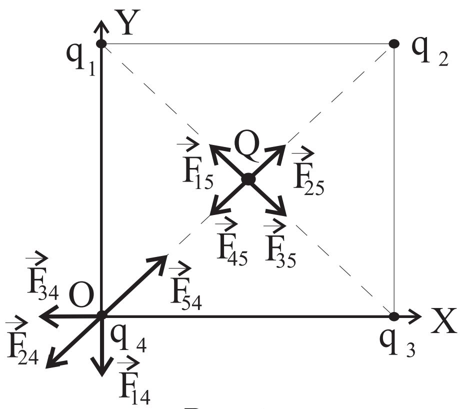

Рис. 1

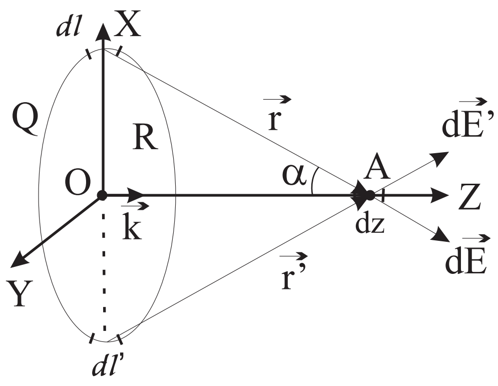

Рис. 2

руем (10) на координатные оси.

$$\text{OX:} -\frac{q^2}{r_{34}^3}a - \frac{q^2}{r_{24}^3}a - \frac{qQ}{r_{54}^3}\frac{a}{2} = 0.$$

Уравнение для проекций на ось OY аналогично последнему. Учитывая, что

$$r_{24} = \sqrt{2}a, r_{34} = a, r_{54} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

получаем в результате

$$\frac{q^2}{2\sqrt{2}a^2} + \frac{q^2}{a^2} + \frac{Qq4}{(\sqrt{2})^3a^2} = 0,$$

$$\text{откуда } Q = -\frac{q}{4}(2\sqrt{2}+1). \tag{11}$$

Ответ: $Q = -\frac{q}{4}(2\sqrt{2}+1)$.

№ 1.П.2.[б] Система состоит из тонкого заряженного проволочного кольца радиуса R и очень длинной равномерно заряженной нити, расположенной по оси кольца так, что один из ее концов совпадает с центром кольца. Последнее имеет заряд Q. На единицу длины нити приходится заряд λ. Найти силу взаимодействия кольца и нити.

Решение

Для решения поставленной задачи предварительно вычислим электрическое поле, создаваемое кольцом на его оси в точке А. Поскольку заряженное кольцо есть система протяженных зарядов, то искомое электрическое поле определяется согласно принципу суперпозиции (5). В качестве $d\vec{E}$ (смотри рис. 2) будем рассматривать поле, создаваемое бесконечно малым элементом кольца dl (т.е. мы мысленно разбиваем кольцо на бесконечно большое число таких элементов и рассматриваем вклад лишь одного такого элемента), электрический заряд dq_1 этого элемента можно считать точечным, следовательно с учетом (6) и (8) получаем

$$d\vec{E} = \frac{k\,dq_1}{r^3}\vec{r}, \;\; dq_1 = \lambda_1 dl = \frac{Q}{2\pi R}dl. \tag{12}$$

Выберем декартову систему координат (ДСК) так, как показано на рис. 2, перейдем в цилиндрическую систему координат (ЦСК) посредством замены:

$$\begin{gathered} \vec{r} = -x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}, r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi, \;\; y = \rho\sin\varphi, \;\; z = z, \\ dS = \rho d\varphi dz, \;\; dV = \rho d\rho d\varphi dz \end{array} \right\}. \end{gathered} \tag{13}$$

в результате имеем

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = k\int_0^{2\pi} \frac{Q}{2\pi R}\frac{Rd\varphi}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(-\rho\cos\varphi\vec{i} - \rho\sin\varphi\vec{j} + z\vec{k}) \tag{14}$$

$$\text{учитывая, что} \;\; \int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi = 0, \tag{15}$$

получаем в результате [1]

$$\vec{E} = \frac{k\,Qz\vec{k}}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{16}$$

Вернемся к поставленной задаче. Сила взаимодействия кольца с элементом нити длины dz определится так

$$d\vec{F} = dq\vec{E}$$

где dq - заряд нити, принадлежащий элементу dz. Учитывая, что $dq{=}\lambda dz$ (здесь мы выбираем ось OZ так как показано на рисунке 2). Следовательно, результирующая сила взаимодействия определяется как

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int_0^{\infty} \frac{k\,Q\lambda z dz\vec{k}}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = k\,\lambda Q\frac{\vec{k}}{(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\Bigg|_{\infty}^{0} = \frac{k\,Q\lambda}{R}\vec{k}, \;\; F = \frac{k\,|Q\lambda|}{R}.$$

[1] Поле кольца можно вычислить иначе, с учетом свойств аксиальной симметрии. Отметим, что всякому элементу кольца $d\ell$ можно сопоставить элемент $d\ell'$ (лежащий на другом конце диаметра кольца). Соответствующая пара зарядов в точке A создает электрические поля $d\vec{E}$, $d\vec{E}'$, сумма которых есть вектор $d\vec{E}''$, лежащий на оси OZ и сонаправленный с последней ($dE'' = 2dE\cos\alpha$). Кольцо можно всегда разбить на такие пары элементарных зарядов, для каждой из которых справедливы выше изложенные рассуждения. Следовательно, результирующее поле также направлено вдоль оси OZ и представляется в виде:

$$\vec{E} = \vec{k}\int dE'' = 2\vec{k}\int\frac{dq_1}{(R^2+z^2)}\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} = 2\vec{k}\frac{Q}{2\pi R}\frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\pi} d\varphi = \frac{k\,Qz\vec{k}}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ответ: $\vec{F} = \frac{k\,Q\lambda}{R}\vec{k}, \;\; F = \frac{k\,|Q\lambda|}{R}.$

№ 1.П.3.[c] Равномерно заряженная нить, на единицу длины которой приходится заряд λ, имеет конфигурацию, показанную на рисунке 3. Найти модуль вектора напряженности в точке А.

Решение

Данную систему можно представить в виде совокупности трех подсистем: двух полубесконечных нитей BY и CX и $\frac{1}{4}$ части окружности BC радиуса R (смотри рис. 3). Вычислим поле, создаваемое полубесконечной нитью CX в точке А. Для этого разобьем нить на бесконечную систему бесконечно малых отрезков длины dl. Поле, создаваемое таким

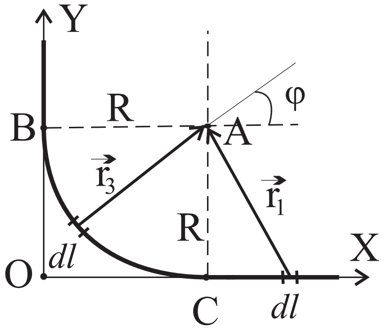

Рис. 3

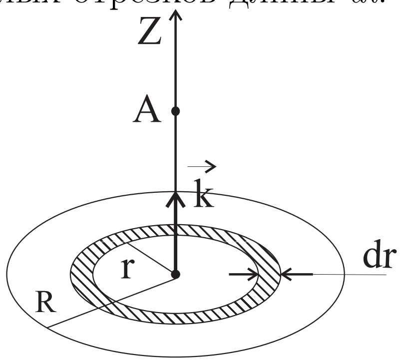

Рис. 4

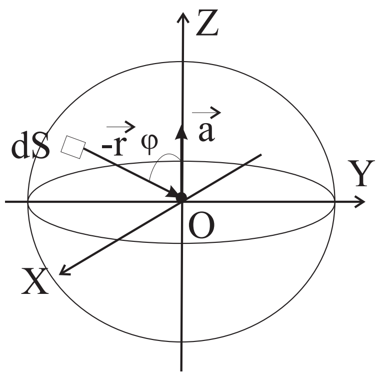

Рис. 5

отрезком в точке А определяется как

$$d\vec{E}_1 = \frac{k\,dq}{r_1^3}\vec{r}_1 \tag{17}$$

Выберем систему координат так как показано на рис. 3, тогда $dl = dx$.

$$d\vec{E}_1 = \frac{k\,\lambda dx}{(R^2+(x-R)^2)^{\frac{3}{2}}}(-(x-R)\vec{i} + R\vec{j}).$$

Следовательно, результирующее поле определяется как:

$$\vec{E}_1 = \int d\vec{E}_1 = k\,\lambda\vec{i}\int_0^{\infty}\frac{xdx}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} + k\,\lambda R\vec{j}\int_0^{\infty}\frac{dx}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Вычисляя в последнем выражении интегралы, в результате получаем следующее выражение для электрического поля, создаваемого полубесконечной нитью в точке А.

$$\vec{E}_1 = k(-\frac{\lambda}{R}\vec{i} + \frac{\lambda}{R}\vec{j}) \tag{18}$$

Аналогично, рассуждая в случае полубесконечной нити BX, получаем поле $\vec{E}_2$:

$$\vec{E}_2 = k(\frac{\lambda}{R}\vec{i} - \frac{\lambda}{R}\vec{j})$$

Вычислим теперь поле $\frac{1}{4}$ части окружности BC в точке А - центре кривизны. Выполним разбиение кольца на бесконечную систему бесконечно малых отрезков. Поле, создаваемое таким отрезком определяется как

$$d\vec{E}_3 = \frac{k\,dq}{r_3^3}\vec{r}_3 = \frac{k\,\lambda dl}{R^3}(R\cos\varphi\vec{i} + R\sin\varphi\vec{j})$$

где угол φ - полярный угол, $dl{=}Rd\varphi$. Следовательно, результирующее поле

$$\vec{E}_3 = \int d\vec{E}_3 = \frac{k\,\lambda}{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}) = \frac{k\,\lambda}{R}(\vec{i} + \vec{j})$$

Результирующее поле, определяемое в точке А, согласно принципу суперпозиции имеет вид:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \frac{k\,\lambda}{R}(\vec{i} + \vec{j}), \quad E = \frac{k\,\lambda}{R}\sqrt{2}. \tag{19}$$

Ответ: $\vec{E} = \frac{k\,\lambda}{R}(\vec{i} + \vec{j}), \quad E = \frac{k\,\lambda}{R}\sqrt{2}.$

№ 1.П.4.[б] Диск радиуса R заряжен равномерно с поверхностной плотностью σ. Определить напряженность поля в точке, находящейся на перпендикуляре к диску, проходящему через его центр, на расстоянии d от диска.

Решение

Пусть точка A – точка, в которой необходимо определить напряженность электрического поля. Направим вдоль данного перпендикуляра ось OZ (см. рис. 4). Разобьем диск на бесконечную систему концентрических колец и рассмотрим одно такое кольцо с радиусом r и шириной dr. Поле, создаваемое таким кольцом, определяется выражением (16), при замене ($Q \to dq$), где $dq-$элементарный заряд кольца. Последний определяется следующим выражением $dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$ (здесь учтено, что площадь поверхности элементарного кольца $dS = 2\pi r dr$).

Согласно принципу суперпозиции (5), поле, создаваемое диском в точке A, определяется следующим выражением:

$$\vec{E}_A = \int\frac{k\,dqz\vec{k}}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi k\,\sigma z\vec{k}\int_0^R\frac{rdr}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi k\,\sigma z\vec{k}\frac{1}{(z^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}\Big|_R^0 =$$
$$= 2\pi k\,\sigma\vec{k}\left[\mathrm{sign}z - \frac{z}{(z^2+R^2)^{\frac{1}{2}}}\right]. \tag{20}$$

если z>0, при z=d:

$$\vec{E} = 2\pi k\,\sigma\vec{k}\left[1 - \frac{d}{(d^2+R^2)^{\frac{1}{2}}}\right], \;\; E = 2\pi k\,\sigma\left[1 - \frac{d}{(d^2+R^2)^{\frac{1}{2}}}\right]. \tag{21}$$

На основе результата (20) легко получить результат для напряженности электрического поля бесконечной плоскости (диска с бесконечно большим радиусом):

$$\vec{E}_A^{\text{б.п.}} = \lim_{R\to\infty} \vec{E}_A = 2\pi k\,\sigma\,\mathrm{sign}z\,\vec{k}, \quad E_A^{\text{б.п.}} = 2\pi k\,\sigma. \tag{22}$$

Ответ: $E = 2\pi k\,\sigma\left[1 - \frac{d}{(d^2+R^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$.

№ 1.П.5.[c] Шар радиуса R заряжен с объемной плотностью $\rho = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{r})$, где $\vec{a}-$некоторый постоянный вектор, $\vec{r}-$радиус-вектор точки шара относительно его центра, $\alpha-$коэффициент пропорциональности. Найти вектор напряженности электрического поля в центре шара.

Решение

Разобьем весь шар на бесконечно малые элементы объема величины dV. В каждом таком элементе содержится электрический заряд $dq = \rho dV$. Данный (точечный) заряд, положение которого определяется радиусом-вектором $\vec{r}$, создает электрическое поле $d\vec{E}$ (определяется выражением (17)) в центре шара (см. рис. 5). Результирующее поле, создаваемое всем шаром в точке O, определяется согласно (5):

$$\vec{E} = -\int \frac{k\,dq}{r^3}\vec{r} = -\alpha k\int \frac{(\vec{a}\vec{r})\vec{r}dV}{r^3}. \tag{23}$$

Выберем декартову систему координат так, как показано на рис. 5 (вектор $\vec{a}$ направлен вдоль оси OZ) и перейдем в сферическую систему координат (R,θ,φ):

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\varphi\sin\theta, \;\; y = r\sin\varphi\sin\theta, \;\; z = r\cos\theta, \\ dS = r^2\sin\theta d\theta d\varphi, \;\; dV = r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi \end{array}\right\}. \tag{24}$$

В результате (23) можно представить в виде:

$$\vec{E} = -\alpha k\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{ar\cos\theta(r\cos\varphi\sin\theta\vec{i} + r\sin\varphi\sin\theta\vec{j} + r\cos\theta\vec{k})}{r^3} r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta =$$

$$= -\alpha k a\left[\vec{i}\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\int_0^\pi\cos\theta\sin^2\theta d\theta + \vec{j}\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^\pi\cos\theta\sin^2\theta d\theta +\right.$$

$$\left. + \vec{k}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi\cos^2\theta\sin\theta d\theta\right]\times\int_0^R r dr = \pi\alpha k a R^2\vec{k}\frac{cos^3\theta}{3}\Big|_0^\pi = -\frac{2\pi}{3}\alpha k R^2\vec{a}. \tag{25}$$

Здесь использован результат (15).

Ответ: $\vec{E} = -\frac{2\pi}{3}\alpha k R^2\vec{a}$, $E = \frac{2\pi}{3}\alpha k R^2 a$.

Аудиторные задачи

№ 1.А.1.[а] Два положительных заряда q_1, q_2 находятся в точках с радиус-векторами $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$. Найти отрицательный заряд q_3 и радиус-вектор $\vec{r}_3$ точки, в которую его надо поместить, чтобы сила, действующая на каждый из этих трех зарядов, была равна нулю.

№ 1.А.2.[б] Находящийся в вакууме тонкий прямой стержень длины $2a$ заряжен равномерно зарядом q. Найти модуль вектора напряженности электрического поля как функцию расстояния r от центра стержня для точек прямой: а) перпендикулярной к стержню и проходящей через его центр, б) на оси стержня вне его. На основе результатов пункта а) получить аналитическое выражение для $\vec{E}$ бесконечно длинного прямолинейного проводника с плотностью λ.

№ 1.А.3.[б] Точечный заряд q находится в центре тонкого кольца радиуса R, по которому равномерно распределен заряд $-q$. Найти модуль напряженности поля на оси кольца в точке, отстоящей от центра кольца на расстоянии x, если $x \gg R$.

№ 1.А.4.[б] Две длинные параллельные нити равномерно заряжены, каждая с линейной плотностью λ=0.5 мкКл/м. Расстояние между нитями l=45см. Найти модуль напряженности поля в плоскости симметрии этой системы, расположенной между нитями.

Примечание: использовать результат задачи № 1.А.2., для $\vec{E}$ бесконечно длинного прямолинейного проводника с плотностью λ.

№ 1.А.5.[с] Используя понятие телесного угла, показать, что из закона Кулона непосредственно вытекает равенство нулю напряженности электрического поля внутри равномерно заряженной сферы.

№ 1.А.6.[с] Бесконечно длинная цилиндрическая поверхность круглого сечения заряжена равномерно по длине с поверхностной плотностью σ=$\sigma_0$cosφ, где φ-полярный угол цилиндрической системы координат с осью z, совпадающей с осью данной поверхности. Найти вектор напряженности электрического поля на оси z.

№ 1.А.7.[с] Определить напряженность электрического поля, создаваемого равномерно заряженной по периметру квадратной рамкой со стороной a, в точке наблюдения A прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей рамки и перпендикулярной плоскости последней. Точка наблюдения A находится на расстоянии ℓ от точки пересечения диагоналей. Заряд рамки Q.

Примечание: использовать результат пункта а) задачи № 1.А.2..

Домашние задачи

№ 1.Д.1.[а] α-частица проходит с большой скоростью через геометрический центр молекулы водорода, двигаясь по линии, перпендикулярной к оси, проведенной через оба протона. Расстояние между протонами равно b. На каком участке пути сила взаимодействия α-частицы с молекулой является максимальной? Предполагается, что протоны мало смещаются за время прохождения α-частицы и электрическим полем электронов в молекуле можно пренебречь.

№ 1.Д.2.[а] Тонкое полукольцо радиуса R=30 см заряжено равномерно зарядом $q = 0.5$ нКл. Найти модуль напряженности поля в центре кривизны этого полукольца.

№ 1.Д.3.[б] Очень длинная прямая равномерно заряженная нить имеет заряд λ на единицу длины. Найти модуль и направление напряженности в точке, которая отстоит от нити на расстоянии y и находится на перпендикуляре к нити, проходящем через один из ее концов.

№ 1.Д.4.[б] На вертикальной пластине достаточно больших размеров равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью σ=20 ед. СГСЭ. На прикрепленной к пластине нити подвешен маленький шарик массы m=3 г, несущий заряд того же знака, что и пластина. Найти заряд шарика, если нить образует с вертикалью угол α=60°.

№ 1.Д.5.[б] Плоское кольцо (внутренний радиус R_1, внешний- R_2) заряжено равномерно с поверхностной плотностью σ. Найти напряженность поля на оси симметрии кольца, перпендикулярной его плоскости, на расстоянии l от его центра.

№ 1.Д.6.[б] Найти напряженность электрического поля в центре кривизны полусферы радиуса R, заряженной равномерно с поверхностной плотностью σ.

№ 1.Д.7.[c] Найти напряженность электрического поля, создаваемого цилиндрической трубкой, с внутренним радиусом R_1 и внешним – R_2 и длины H, в точке A, находящейся на оси трубки и отстоящей от одного из концов трубки на расстоянии d. Предполагается, что трубка равномерно заряжена по объему с плотностью электрического заряда ρ.

Примеры тестовых вопросов [а]

1. Какую наиболее общую математическую форму носит закон Кулона?

Ответ: а) *скалярную*, б) *векторную*, в) *тензорную*, г) *спинорную*.

2. Какую наиболее общую математическую форму носит принцип суперпозиции для напряженности электрического поля?
Ответ: а) *скалярную*, б) *векторную*, в) *тензорную*, г) *спинорную*.

3. В каком случае принцип суперпозиции для напряженности электрического поля может нарушаться?
Ответ: а) *в случае полей с очень большими интенсивностями*, б) *в случае полей с очень малыми интенсивностями*, в) *в случае полей с очень большой начальной фазой*, г) *в случае полей с одинаковыми частотами*.

4. В рамках какой из ниже перечисленных теорий могут быть корректно описаны эффекты, не подчиняющиеся классическому принципу суперпозиции электрических полей?
Ответ: а) *квантовая механика*, б) *квантовая электродинамика*, в) *классическая электродинамика Максвелла*, г) *классическая механика Ньютона*.

5. В какой системе единиц коэффициент пропорциональности в законе Кулона равен $1/(4\pi\varepsilon_0)$?
Ответ: а) *СГСЕ*, б) *система единиц Друде-Лоренца*, в) *СИ*, г) *СГСМ*.

6. Как зависит от выбора инерциальной системы отсчета (ИСО) электрический заряд?
Ответ: а) *зависит линейно от скорости начала отсчета ИСО*, б) *зависит квадратично от скорости начала отсчета ИСО*, в) *зависит линейно от расстояния до начала отсчета ИСО*, г) *заряд инвариантен относительно выбора инерциальной системы отсчета*.

7. Какое из ниже представленных утверждений не может быть сопоставлено в равной степени законам Кулона и всемирного тяготения Ньютона?
Ответ: а) *сила взаимодействия обратно пропорциональна квадрату расстояния между точечными частицами*, б) *в СИ, в аналитическое выражение закона, вводится ненулевой коэффициент пропорциональности*, в) *данный закон носит векторный характер*, г) *сила взаимодействия может носить как характер притяжения так и характер отталкивания*.

8. Что принимается за направление силовой линии в какой-либо точке электрического поля?
Ответ: а) *направление движения отрицательных электрических зарядов*, б) *направление вектора напряженности поля в этой точке*, в) *направление движения положительных электрических зарядов*, г) *направление "север-юг" магнитной стрелки компаса*.

9. Какое электрическое поле называется однородным?

Ответ: а) *поле, в котором силовые линии параллельны*, б) *поле, созданное точечным зарядом*, в) *поле, созданное тонким кольцом*, г) *поле, напряженность которого во всех точках одинакова по величине и направлению.*

10. Как изменится сила кулоновского взаимодействия двух точечных зарядов при увеличении каждого заряда в 2 раза, если расстояние между ними увеличить в 2 раза?
Ответ: а) *увеличится в 16 раз*, б) *не изменится*, в) *уменьшится в 2 раза*, г) *увеличится в 2 раза.*

11. Два одинаковых металлических шара заряжены равными одноименными зарядами. Шарики привели в соприкосновение и раздвинули на прежнее расстояние. Во сколько раз изменилась сила взаимодействия?
Ответ: а) *осталась прежней по величине и направлению*, б) *увеличилась в 2 раза*, в) *уменьшилась в 2 раза*, г) *осталась прежней по величине, но стала противоположной по направлению.*

12. Два электрона находятся на расстоянии 1 мм один от другого. Что больше: сила электростатического взаимодействия или гравитационного взаимодействия?
Ответ: а) *сила гравитационного взаимодействия*, б) *силы равны*, в) *сила электростатического взаимодействия.*

13. Какой кривой описывается зависимость электрического поля, создаваемого равномерно заряженной нитью, от расстояния (между нитью и точкой наблюдения)?
Ответ: а) *прямой*, б) *параболой*, в) *гиперболой*, г) *синусоидой.*

14. Какую математическую форму носит закон сохранения электрического заряда?
Ответ: а) *скалярную*, б) *векторную*, в) *тензорную*, г) *спинорную.*

15. Какому из ниже приведенных понятий соответствует следующее определение: данная величина определяется отношением бесконечно малой порции электрического заряда к величине бесконечно малой площадки, на которой, данный заряд располагается.
Ответ: а) *напряженность электрического поля*, б) *линейная плотность электрического заряда*, б) *поверхностная плотность электрического заряда*, г) *коэффициент пропорциональности в законе Кулона.*

Задачи для самостоятельного решения

№ 1.С.1.[а] Сила взаимного гравитационного притяжения двух водяных, одинаково заряженных капель уравновешивается силой электростатического отталкивания. Определить заряд капель, если их радиусы равны $1.5 \cdot 10^{-4}$ м.

№ 1.C.2.[а] Точечные заряды $q_1 = 10^{-9}$ Кл и $q_2 = 5 \cdot 10^{-8}$ Кл имеют координаты соответственно равные $(0, 0)$ и $(4, 0)$ и находятся в вакууме. Найти напряженность электрического поля в точке $(3, 4\sqrt{3})$. Указанные выше координаты выражены в метрах.

№ 1.C.3. [б] Два шарика с массами $m_1 = 5$ г и $m_2 = 25$ г, несущие заряды соответственно $q_1 = 7 \cdot 10^{-8}$ Кл и $q_2 = -21 \cdot 10^{-8}$ Кл, двигаются на встречу друг другу под действием электростатической силы притяжения. Первоначальное расстояние между ними $\ell_0 = 30$ см, начальные скорости шариков равны нулю. Определить скорости, которые они будут иметь в тот момент, когда расстояние между ними станет $\ell = 8$ см.

№ 1.C.4.[б] Тонкое непроводящее кольцо радиуса R заряжено равномерно с линейной плотностью $\lambda = \lambda_0 \cos\varphi$, где λ_0 − постоянная, φ − азимутальный угол. Найти модуль напряженности электрического поля в центре кольца.

№ 1.C.5.[б] Для системы, представленной в предыдущей задаче, найти модуль напряженности электрического поля на оси кольца в зависимости от расстояния d до его центра. Исследовать полученное выражение при $d \gg R$.

№ 1.C.6.[б] Два бесконечно длинных параллельных провода, расположенных в вакууме, заряжены равномерно с линейной плотностью $\lambda = 8 \cdot 10^{-6}$ Кл/м. Расстояние между проводами $d = 0.3$ м. Определить силу, действующую на единицу длины провода.

№ 1.C.7.[с] Сфера радиуса R заряжена с поверхностной плотностью $\sigma = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{r})$, где $\vec{a}$-постоянный вектор, $\vec{r}$ − радиус-вектор точки сферы относительно ее центра, α − коэффициент пропорциональности. Найти вектор напряженности электрического поля в центре сферы.

№ 1.C.8.[с] Поверхностная плотность заряда на сфере радиуса R зависит от полярного угла φ как $\sigma = \sigma_0 \cos\varphi$, где σ_0 − положительная постоянная. Показать, что такое распределение электрического заряда можно представить как результат малого сдвига друг относительно двух равномерно заряженных шаров радиуса R, заряды которых одинаковы по модулю и противоположны по знаку. Воспользовавшись этим предположением, найти напряженность электрического поля внутри данной сферы.

№ 1.C.9.[с] Определить напряженность электрического поля, создаваемого равномерно заряженным тором с круглым поперечным сечением, в точке, находящейся на оси тора. Радиусы кривизны и поперечного сечения тора равны соответственно R и r. Объемная плотность электрического заряда равна ρ.

№ 1.C.10.[c] Используя лишь принцип суперпозиции (5) доказать, что проекция вектора напряженности электрического поля равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью σ на ось z (ось, перпендикулярная заряженной плоскости) равна $E_z = 2\pi k\sigma\, \mathrm{sign} z$.

	Вариант														
Вопрос	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
№ 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
№ 2	6	7	8	9	10	8	9	10	2	4	15	5	1	11	3
№ 3	11	12	13	14	15	12	13	14	3	6	4	3	6	9	6
Задача															
№ 1	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3
№ 2	10	9	8	7	8	7	9	10	9	10	7	8	7	8	10

Таблица 1: *список вариантов и соответствующих номеров вопросов и задач для самостоятельного решения настоящего параграфа.*

Семинар № 2. Теорема Остроградского-Гаусса

Теоретический минимум

Формулировка: *поток вектора напряженности электрического поля ($\vec{E}$) через замкнутую поверхность (S) произвольной формы пропорционален суммарному алгебраическому заряду (q_s), находящемуся внутри данной поверхности*, т.е.

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi k\, q_S. \tag{26}$$

Дифференциальная форма теоремы (4-ое уравнение Максвелла в вакууме):

$$div\vec{E} = 4\pi k\, \rho, \tag{27}$$

здесь ρ - объемная плотность электрического заряда.

Данная теорема наиболее часто используется в расчете электрических полей систем с а) зеркальной, б) аксиальной, в) сферической симметрией.

При решении задач, посвященных расчету напряженности электрического поля с помощью теоремы Остроградского-Гаусса, следует придерживаться следующего алгоритма.

1. Выясняем какие симметрии присутствуют в системе.